الفصل الرابع // الهندسة الإحداثية

التمثيل البياني للمعادلات في المستوي الإحداثي

التمثيل البياني للمعادلة الخطية في المستوي الإحداثي

المعادلة الخطية : الصيغة العامة للمعادلة الخطية هي : $a, b, c \in R \quad , \quad ay + bx + c = 0$ حيث $a, b \neq 0$ معا والمتغيرات فيها لا تكون مرفوعة لقوة اكبر من 1 وأن تمثيلها بالمستوي الحداثي يمثل مستقيما .



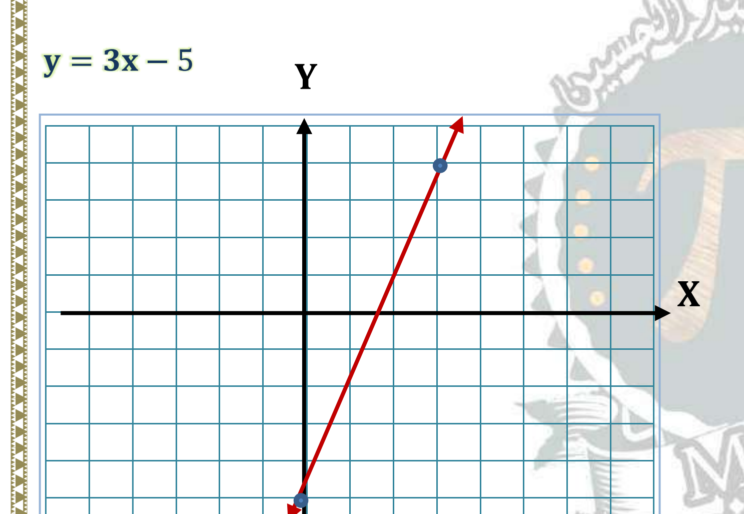
مثل المعادلات التالية في المستوي الإحداثي وماذا تلاحظ ؟

1) $y - 3x + 5 = 0$

الحل :

$y = 3x - 5$

x	$y = 3x - 5$	(x, y)
0	$3(0) - 5 = 0 - 5 = -5$	$(0, -5)$
3	$3(3) - 5 = 9 - 5 = 4$	$(3, 4)$



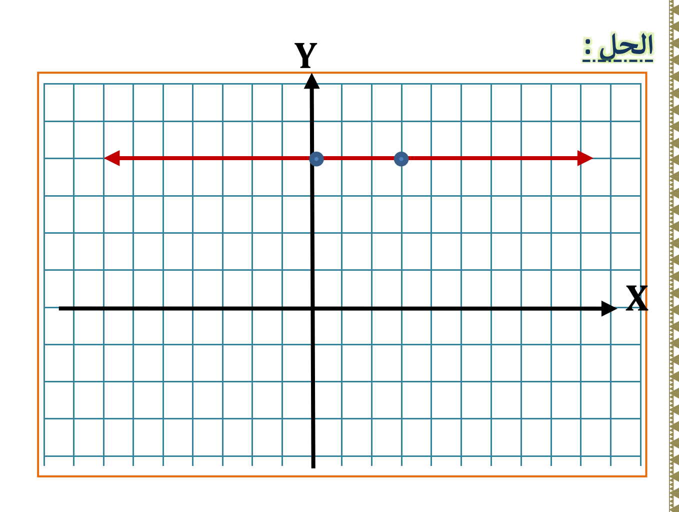
المستقيم يقطع محور السينات والصادات

بنقطة الأصل .

2) $y = 4$

الحل :

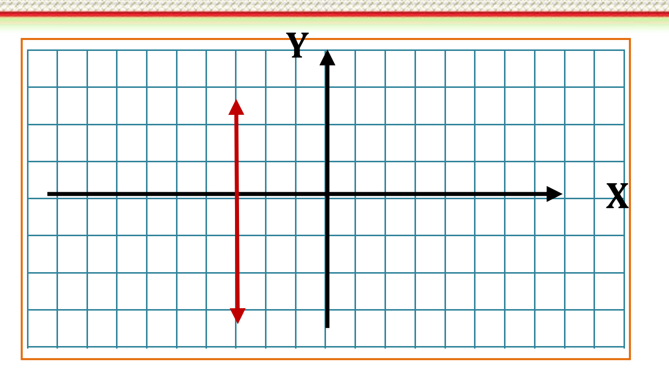
x	$y = 4$	(x, y)
0	4	$(0, 4)$
3	4	$(3, 4)$



المستقيم يوازي محور السينات

3 $x = -3$

الحل :

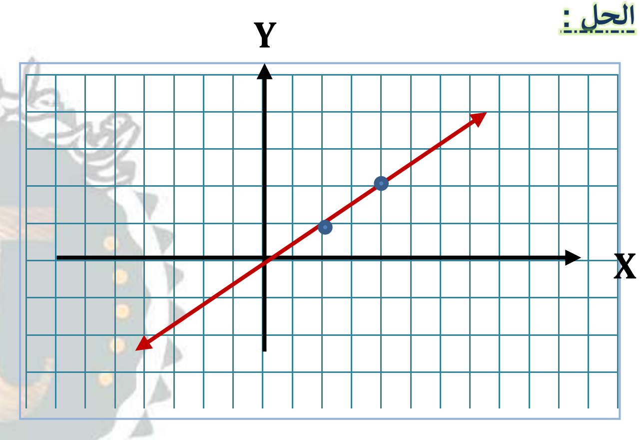


المستقيم $x = -3$ يوازي محور الصادات

مثال في دراسة لتحديد كمية الحليب التي تحتاجها جراء آكل النمل حديثي الولادة باللترات على مدى بضعة أيام توصل الباحث الى المعادلة : $2y - x = 0$ حيث x عدد الأيام y كمية الحليب باللترات . كيف يمكنني تمثيل العلاقة بالمستوي الإحداثي ؟

الحل :

$2y - x = 0 \Rightarrow 2y = x \Rightarrow y = \frac{x}{2}$



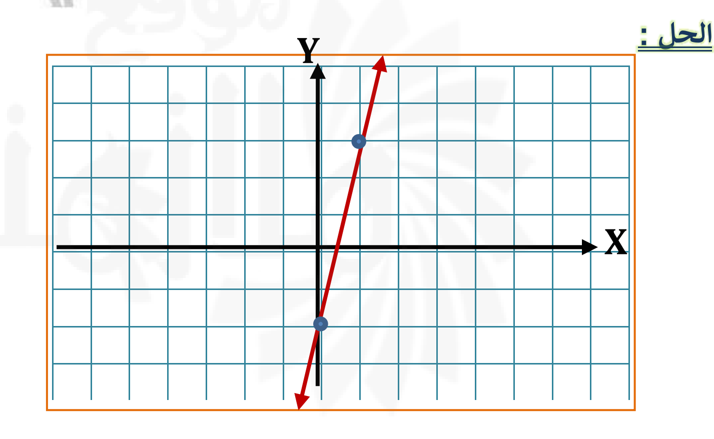
x	$y = \frac{x}{2}$	(x,y)
2	$\frac{2}{2} = 1$	(2,1)
4	$\frac{4}{2} = 2$	(4,2)

معادلة المستقيم يمر بنقطة الأصل

مثال مثل المعادلة $y = 5x - 2$ في المستوي الإحداثي ؟

الحل :

x	$y = 5x - 2$	(x,y)
0	$5(0) - 2 = -2$	$(0, -2)$
1	$5(1) - 2 = 3$	(1,3)



اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين   07703153998

المعادلة	العلاقة مع المحورين
$ay + bx + c = 0$	المستقيم يقطع المحورين ولا يمر بنقطة الأصل
$ay + bx = 0$	المستقيم يقطع المحورين في نقطة الأصل
$y = k , k \in R$	المستقيم يوازي محور السينات وعمودي على محور الصادات وير بالنقطة $(0, k)$
$x = h , h \in R$	المستقيم يوازي محور الصادات وعمودي على محور السينات ويمر بالنقطة $(h, 0)$

التمثيل البياني للمعادلة التربيعية في المستوي الإحداثي

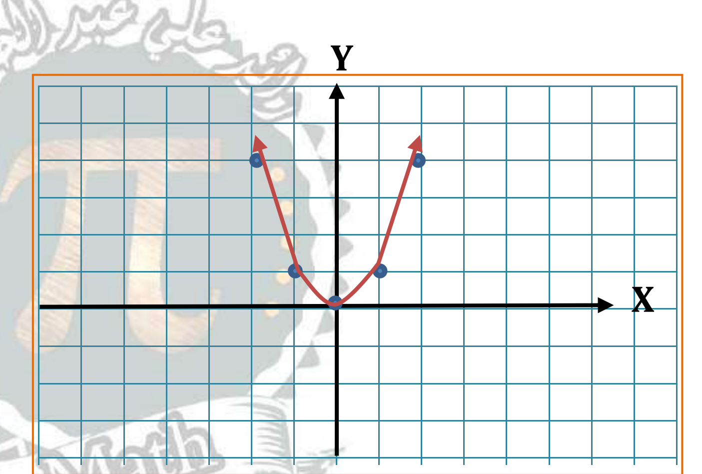
الصيغة العامة للمعادلة التربيعية هي : $y = ax^2 + c$ حيث $a \neq 0 , a, c \in R$

لتمثيل المعادلة نعمل جدول ويكون التمثيل البياني للجدول هو $\cup$ أو $\cap$ حيث نأخذ قيم $x = \{1, 2, 0, -1, -2\}$

مثال مثل المعادلة $y = -x^2$

الحل :

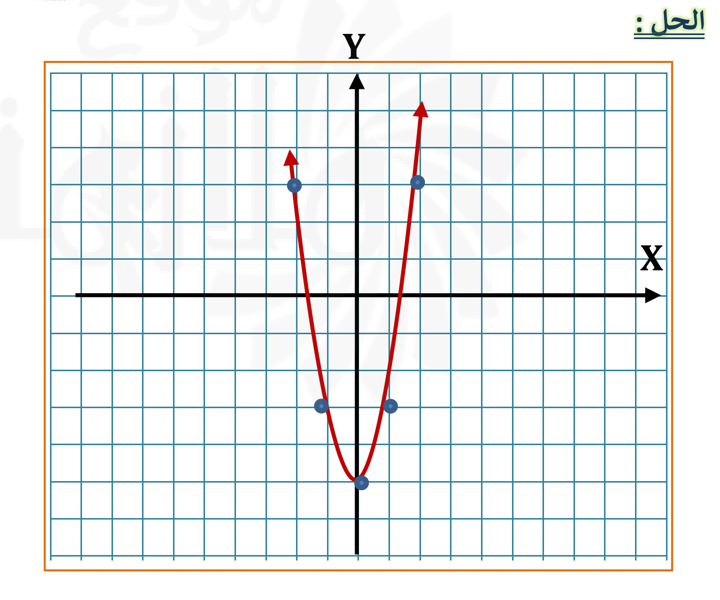
x	$y = -x^2$	y	(x, y)
1	$-(1)^2$	1	(1, 1)
2	$-(2)^2$	4	(2, 4)
0	$-(0)^2$	0	(0, 0)
−1	$-(-1)^2$	1	(−1, 1)
−2	$-(-2)^2$	4	(−2, 4)



مثال مثل المعادلة $y = 2x^2 - 5$

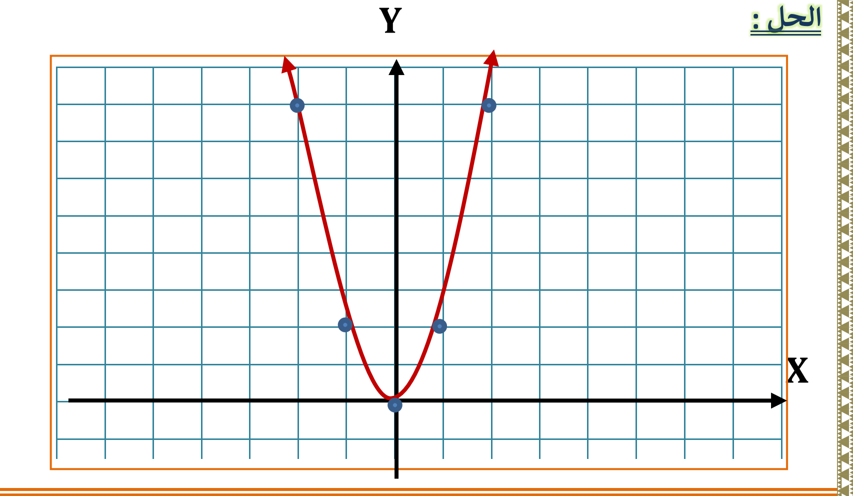
الحل :

x	$y = 2x^2 - 5$	y	(x, y)
1	$2(1)^2 - 5 = 2 - 5$	−3	(1, −3)
2	$2(2)^2 - 5 = 8 - 5$	3	(2,3)
0	$2(0)^2 - 5 = 0 - 5$	−5	(0, −5)
−1	$2(-1)^2 - 5 = 2 - 5$	−3	(−1, −3)
−2	$2(-2)^2 - 5 = 8 - 5$	3	(−2,3)



مثال مثل المعادلة $y = 2x^2$

الحل :



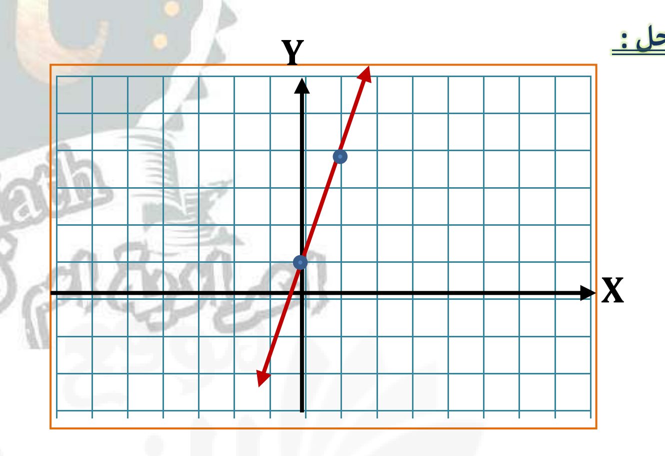
x	$y = 2x^2$	y	(x, y)
1	$2(1)^2$	2	(1, 2)
2	$2(2)^2$	8	(2, 8)
0	$2(0)^2$	0	(0, 0)
−1	$2(-1)^2$	2	(−1, 2)
−2	$2(-2)^2$	8	(−2, 8)

تأكد من فهمك

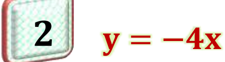
مثل المعادلات التالية في المستوي الإحداثي وبين علاقتها بالمحورين :

1 $y = 3x + 1$

الحل :



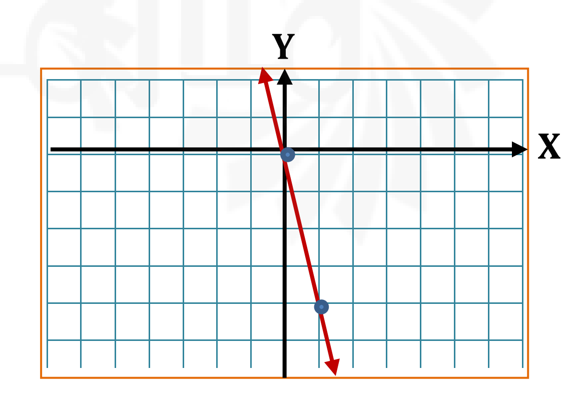
x	$y = 3x + 1$	(x, y)
0	$3(0) + 1 = 1$	(0,1)
1	$3(1) + 1 = 4$	(1,4)



المستقيم يقطع المحورين ولا يمر بنقطة الأصل

2 $y = -4x$

الحل :

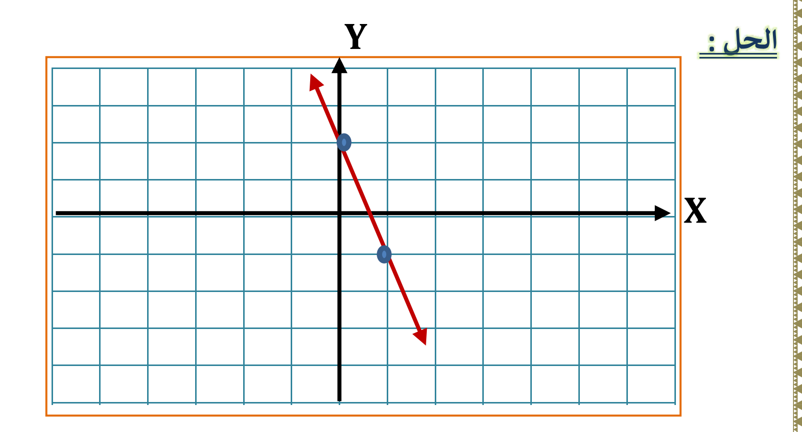


x	$y = -4x$	(x, y)
0	$-4(0) = 0$	(0,0)
1	$-4(1) = -4$	(1, −4)

المستقيم يقطع المحورين في نقطة الأصل

3 $y + 2x - 2 = 0$

الحل :



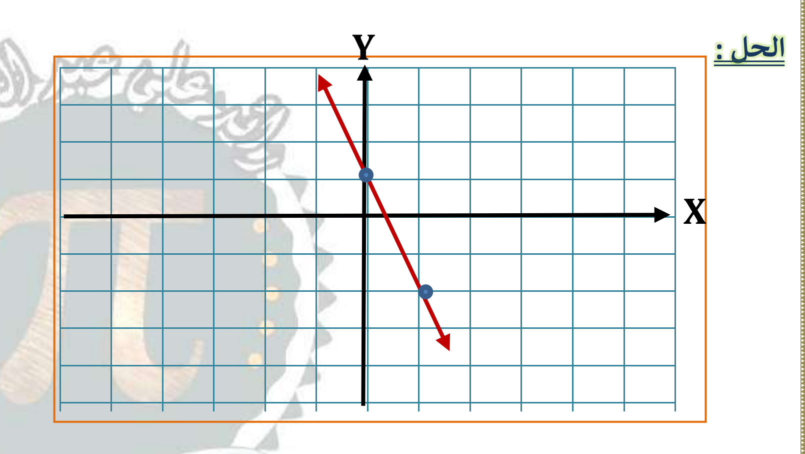
$y = 2 - 3x$

x	$y = 2 - 3x$	(x, y)
0	$2 - 3(0) = 2 - 0 = 2$	$(0,2)$
1	$2 - 3(1) = 2 - 3 = -1$	$(1,-1)$

المستقيم يقطع المحورين ولا يمر بنقطة الأصل


4 $y = 1 - 3x$

الحل :



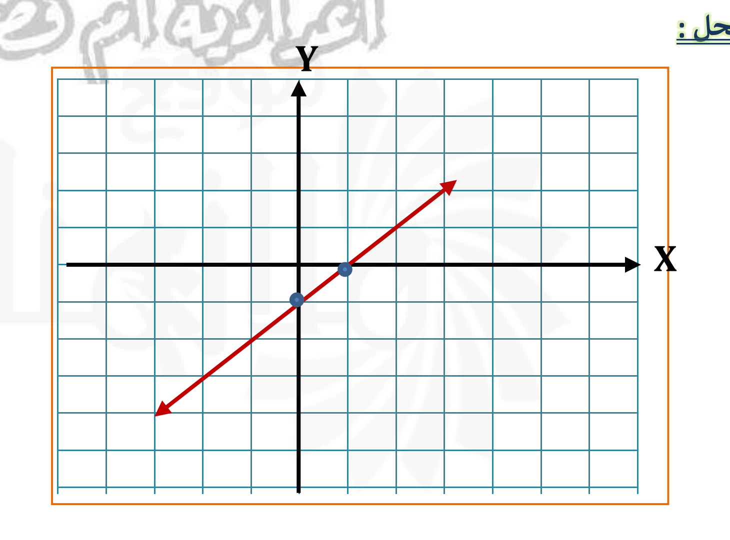
x	$y = 1 - 3x$	(x, y)
0	$2 - 3(0) = 1 - 0 = 1$	$(0,1)$
1	$1 - 3(1) = 1 - 3 = -2$	$(1,-2)$

المستقيم يقطع المحورين ولا يمر بنقطة الأصل


5 $y - x + 1 = 0$

الحل :

$y = x - 1$

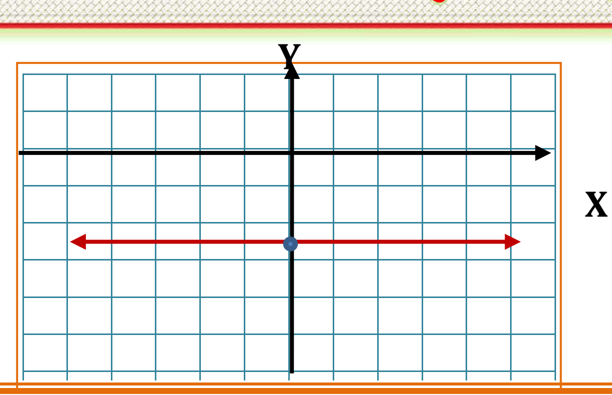


x	$y = x - 1$	(x, y)
0	$0 - 1 = -1$	$(0,-1)$
1	$1 - 1 = 0$	$(1,0)$

المستقيم يقطع المحورين ولا يمر بنقطة الأصل


6 $y + 5 = 0$

الحل :



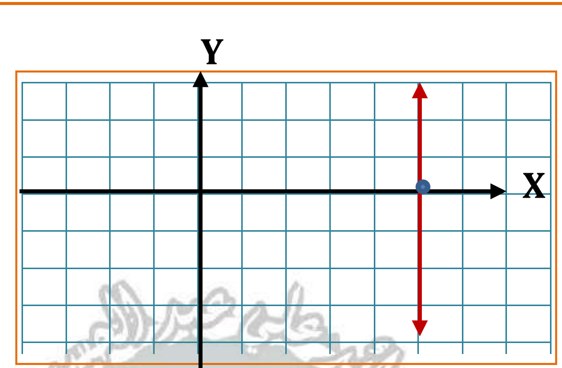
$y = -5$

المستقيم يوازي محور السينات ويمر بالنقطة

$(0, -5)$


7 $x - 5 = 0$

الحل :



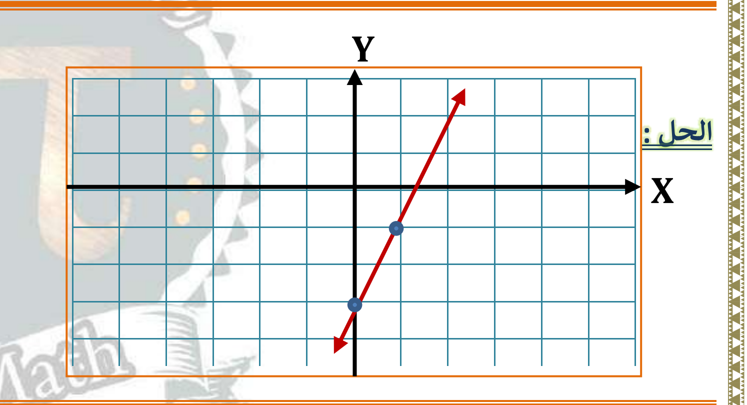
$x = 5$

المستقيم يوازي محور الصادات

ويمر بالنقطة $(5, 0)$


8 $y = 4x - 3$

الحل :

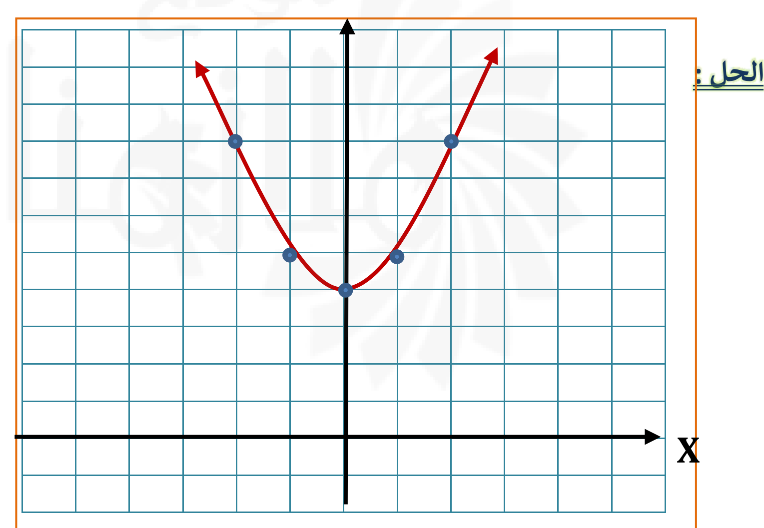


x	$y = 4x - 3$	(x, y)
0	$4(0) - 3 = -3$	$(0, -3)$
1	$4(1) - 3 = 1$	$(1, 1)$

مثل المعادلات التربيعية التالية في المستوي الإحداثي :

9 $y = x^2 + 4$

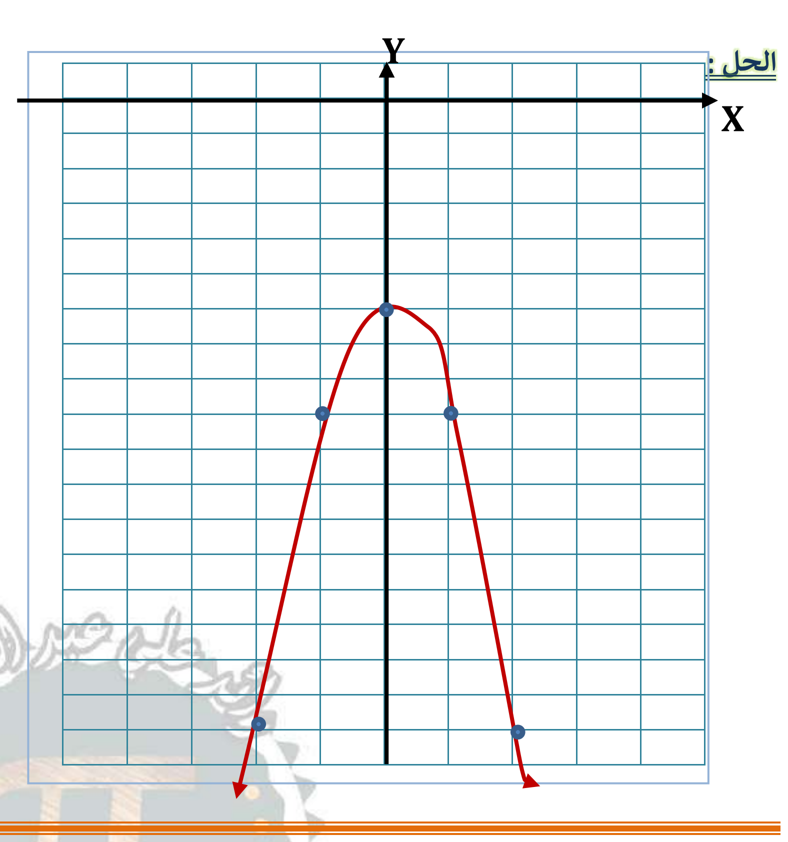
الحل :



x	$y = x^2 + 4$	y	(x, y)
1	$(1)^2 + 4$	5	$(1, 5)$
2	$(2)^2 + 4$	8	$(2, 8)$
0	$(0)^2 + 4$	4	$(0, 4)$
−1	$(-1)^2 + 4$	5	$(-1, 5)$
−2	$(-2)^2 + 4$	8	$(-2, 8)$

10 $y = -3x^2 - 6$

الحل :

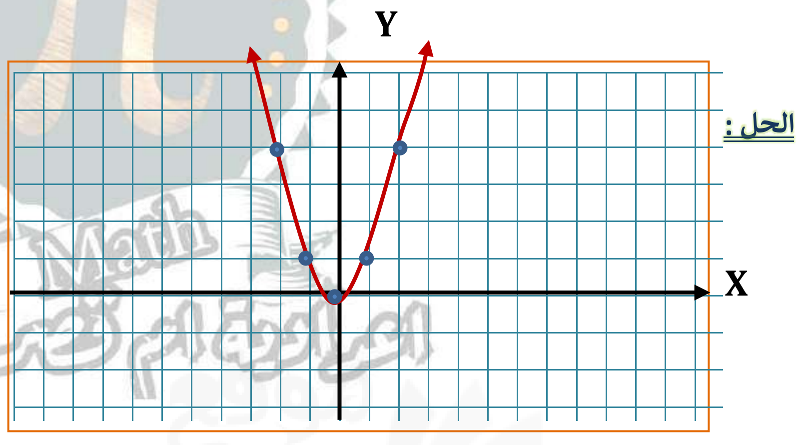


x	$y = -3x^2 - 6$	y	(x, y)
1	$-3(1)^2 - 6$	−9	(1, −9)
2	$-3(2)^2 - 6$	−18	(2, −18)
0	$-3(0)^2 - 6$	−6	(0, −6)
−1	$-3(-1)^2 - 6$	−9	(−1, −9)
−2	$-3(-2)^2 - 6$	−18	(−2, −18)

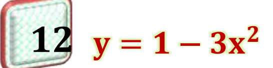


11 $y = x^2$

الحل :

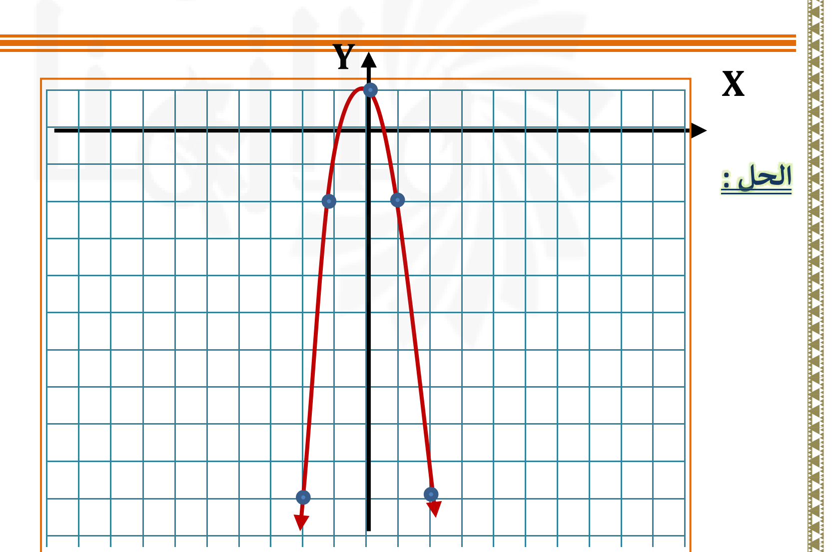


x	$y = x^2$	y	(x, y)
1	$(1)^2$	1	(1, 1)
2	$(2)^2$	4	(2, 4)
0	$(0)^2$	0	(0, 0)
−1	$(-1)^2$	1	(−1, 1)
−2	$(-2)^2$	4	(−2, 4)



12 $y = 1 - 3x^2$

الحل :



x	$y = 1 - 3x^2$	y	(x, y)
1	$1 - 3(1)^2$	−2	(1, −2)
2	$1 - 3(2)^2$	−11	(2, −11)
0	$1 - 3(0)^2$	1	(0, 1)
−1	$1 - 3(-1)^2$	−2	(−1, −2)
−2	$1 - 3(-2)^2$	−11	(−2, −11)



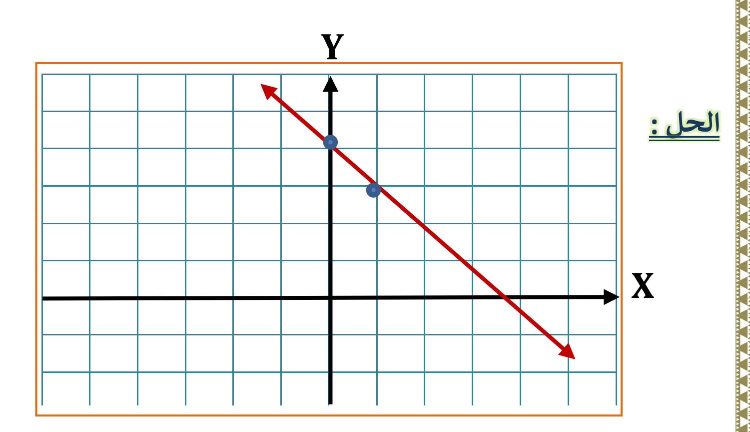



تدرب وحل التمرينات

مثل المعادلات الخطية التالية في المستوي الإحداثي وبين علاقتها بالمحورين :

13 $y = -x + 4$

الحل :

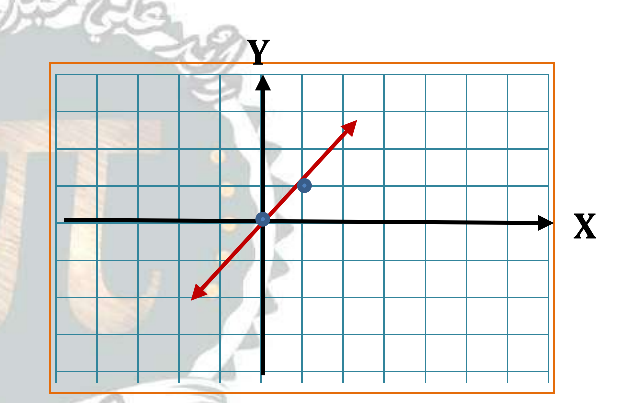


x	$y = -x + 4$	(x, y)
0	$0 + 4 = 4$	$(0, 4)$
1	$-1 + 4 = 3$	$(1, 3)$

المستقيم يقطع المحورين ولا يمر بنقطة الأصل

14 $y = x$

الحل :



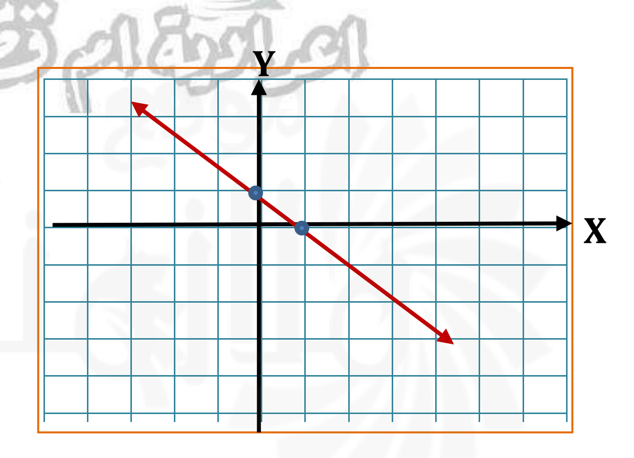
x	$y = x$	(x, y)
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$

المستقيم يقطع المحورين في نقطة الأصل

15 $y + x - 1 = 0$

الحل :

$y = 1 - x$



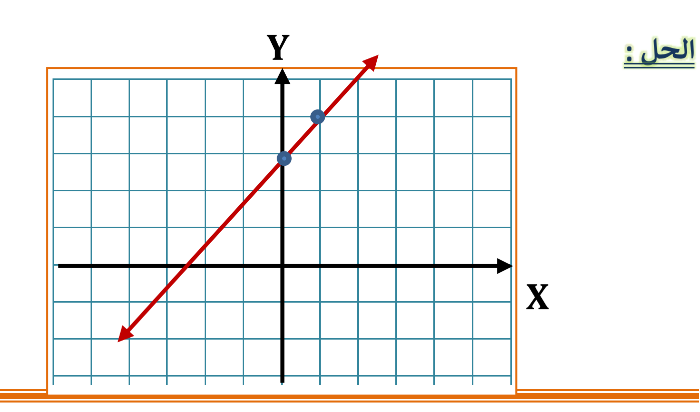
x	$y = 1 - x$	(x, y)
0	$1 - 0 = 1$	$(0, 1)$
1	$1 - 1 = 0$	$(1, 0)$

المستقيم يقطع المحورين ولا يمر بنقطة الأصل

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998

16 $y - x - 3 = 0$

الحل :



$y = x + 3$

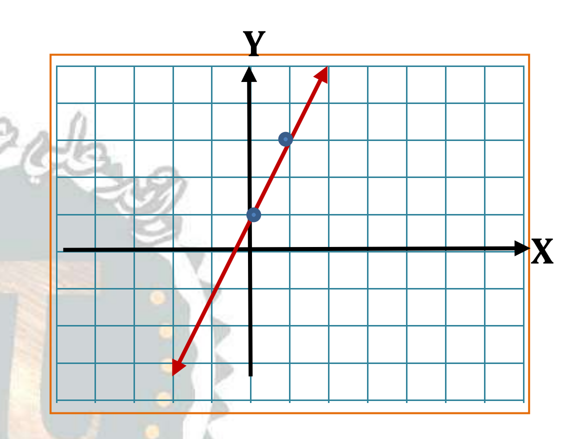
x	$y = x + 3$	(x,y)
0	$0 + 3 = 3$	(0,3)
1	$1 + 3 = 4$	(1,4)

المستقيم يقطع المحورين ولا يمر بنقطة الأصل



17 $y - 2x - 1 = 0$

الحل :



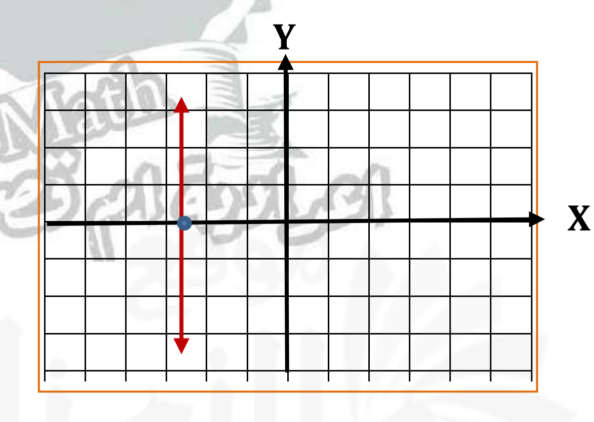
$y = 2x + 1$

x	$y = 2x + 1$	(x,y)
0	$2(0) + 1 = 1$	(0,1)
1	$2(1) + 1 = 3$	(1,3)

المستقيم يقطع المحورين ولا يمر بنقطة الأصل

18 $x = -\frac{5}{2}$

الحل :



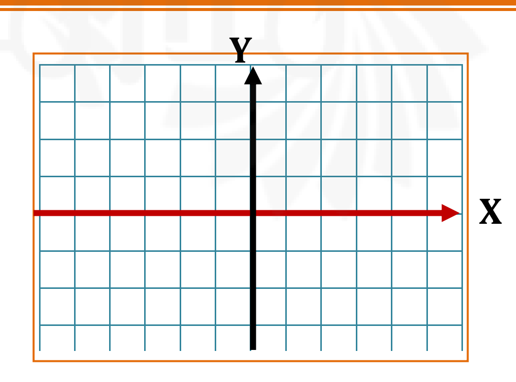
المستقيم يوازي محور الصادات ويمر بالنقطة

$\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$



19 $y = 0$

الحل :



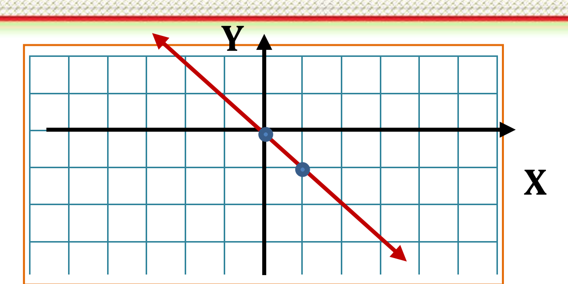
المستقيم يمثل محور السينات وعمودي على محور الصادات

ويمر بالنقطة $(0, 0)$



20 $x + y = 0$

الحل :



$y = -x$

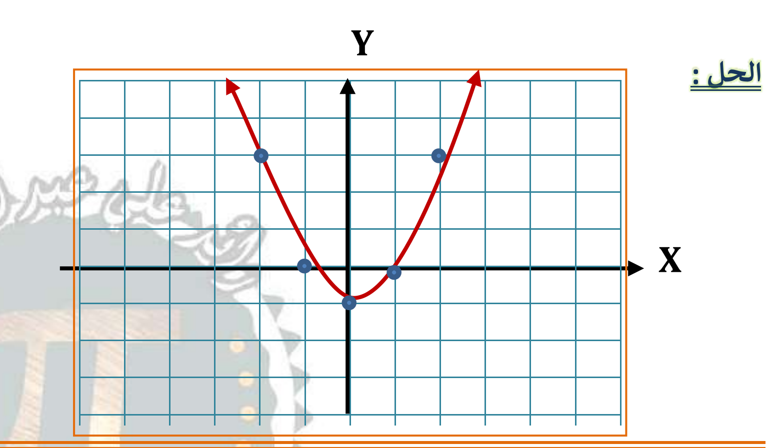
x	$y = -x$	(x, y)
0	0	$(0, 0)$
1	-1	$(1, -1)$

المستقيم يقطع المحورين في نقطة الأصل

مثل المعادلات التربيعية في المستوي الإحداثي :

21 $y = x^2 - 1$

الحل :

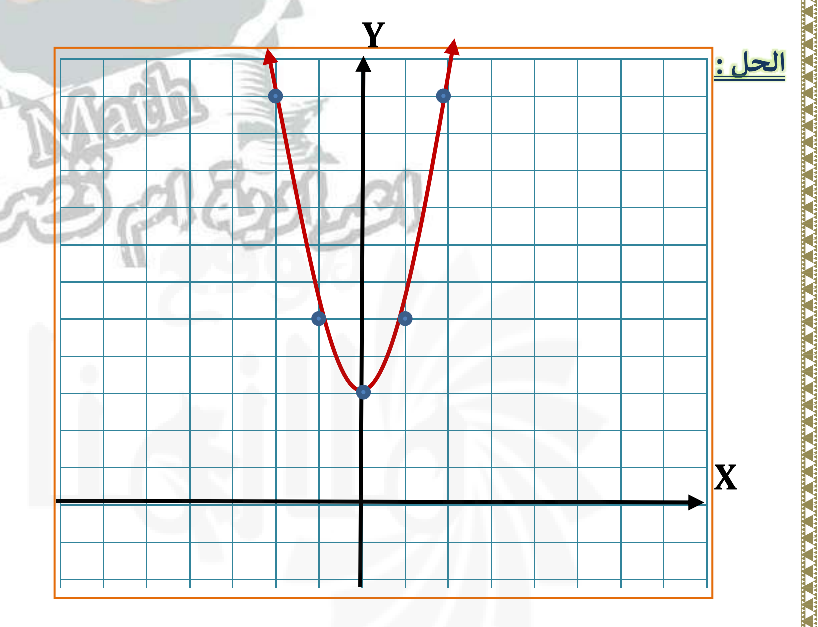


x	$y = x^2 - 1$	y	(x, y)
1	$(1)^2 - 1$	0	$(1, 0)$
2	$(2)^2 - 1$	3	$(2, 3)$
0	$(0)^2 - 1$	-1	$(0, -1)$
-1	$(-1)^2 - 1$	0	$(-1, 0)$
-2	$(-2)^2 - 1$	3	$(-2, 3)$

---

22 $y = 2x^2 + 3$

الحل :



x	$y = 2x^2 + 3$	y	(x, y)
1	$2(1)^2 + 3$	5	$(1, 5)$
2	$2(2)^2 + 3$	11	$(2, 11)$
0	$2(0)^2 + 3$	3	$(0, 3)$
-1	$2(-1)^2 + 3$	5	$(-1, 5)$
-2	$2(-2)^2 + 3$	11	$(-2, 11)$

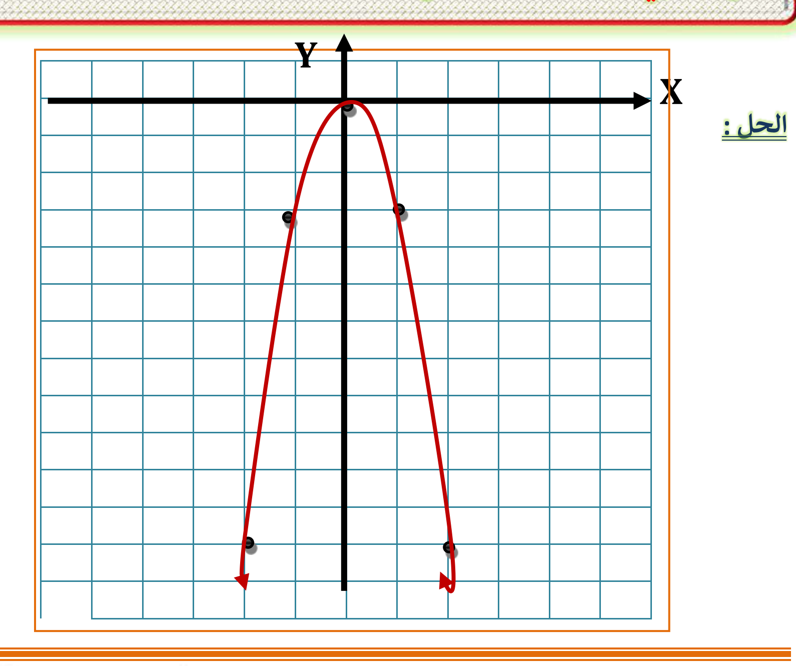


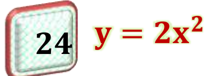


23 $y = -3x^2$

الحل :

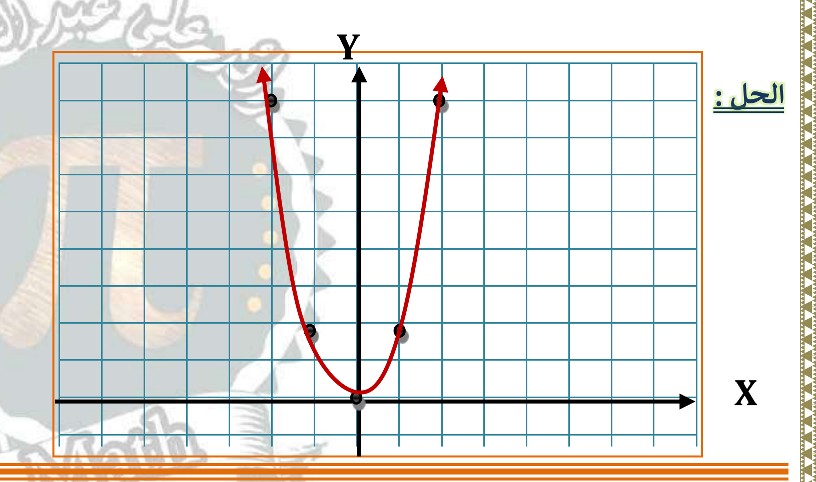
x	$y = -3x^2$	y	(x, y)
1	$-3(1)^2$	-3	$(1, -3)$
2	$-3(2)^2$	-12	$(2, -12)$
0	$-3(0)^2$	0	$(0, 0)$
-1	$-3(-1)^2$	-3	$(-1, -3)$
-2	$-3(-2)^2$	-12	$(-2, -12)$




24 $y = 2x^2$

الحل :

x	$y = 2x^2$	y	(x, y)
1	$2(1)^2$	2	$(1, 2)$
2	$2(2)^2$	8	$(2, 8)$
0	$2(0)^2$	0	$(0, 0)$
-1	$2(-1)^2$	2	$(-1, 2)$
-2	$2(-2)^2$	8	$(-2, 8)$

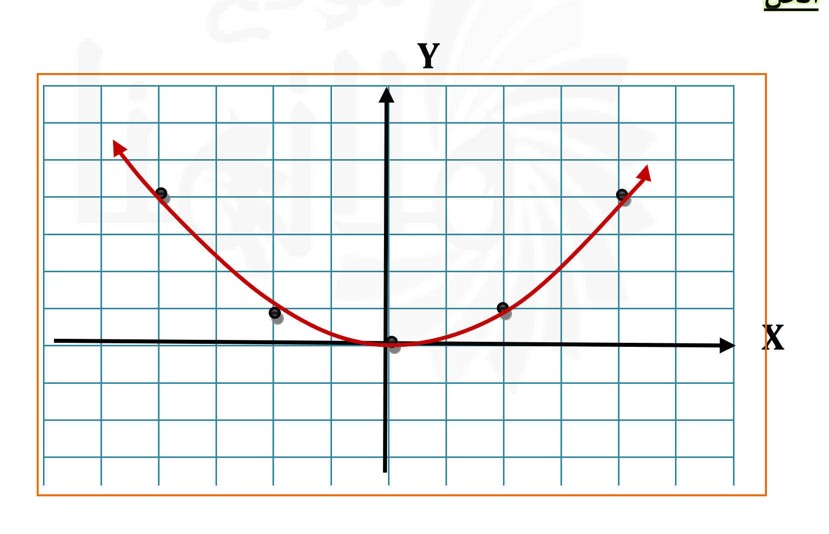



25 $4y = x^2$

الحل

$y = \frac{x^2}{4}$

x	$y = \frac{x^2}{4}$	y	(x, y)
2	$\frac{(2)^2}{4}$	1	(2,1)
4	$\frac{(4)^2}{4}$	4	(4,4)
0	$\frac{(0)^2}{4}$	0	(0,0)
-2	$\frac{(-2)^2}{4}$	1	$(-2,1)$
-4	$\frac{(-4)^2}{4}$	8	$(-4,4)$





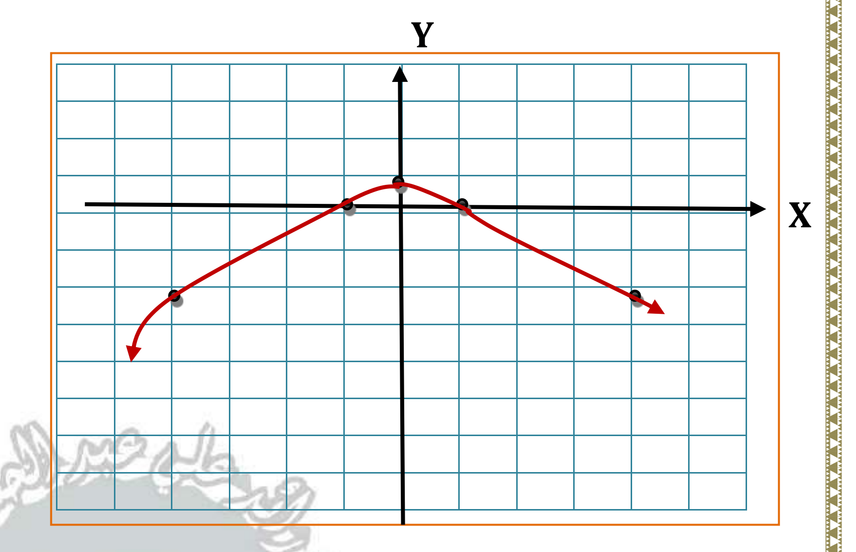
07703153998 اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين

26 $x^2 + 5y = 1$

الحل :

$5y = 1 - x^2 \Rightarrow y = \frac{1-x^2}{5}$

x	$y = \frac{1-x^2}{5}$	y	(x,y)
1	$\frac{1-(1)^2}{5}$	0	$(1,0)$
4	$\frac{1-(4)^2}{5}$	-3	$(4,-3)$
0	$\frac{1-(0)^2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\left(0,\frac{1}{5}\right)$
-4	$\frac{1-(-4)^2}{5}$	-3	$(-4,-3)$
-1	$\frac{1-(-1)^2}{5}$	0	$(-1,0)$

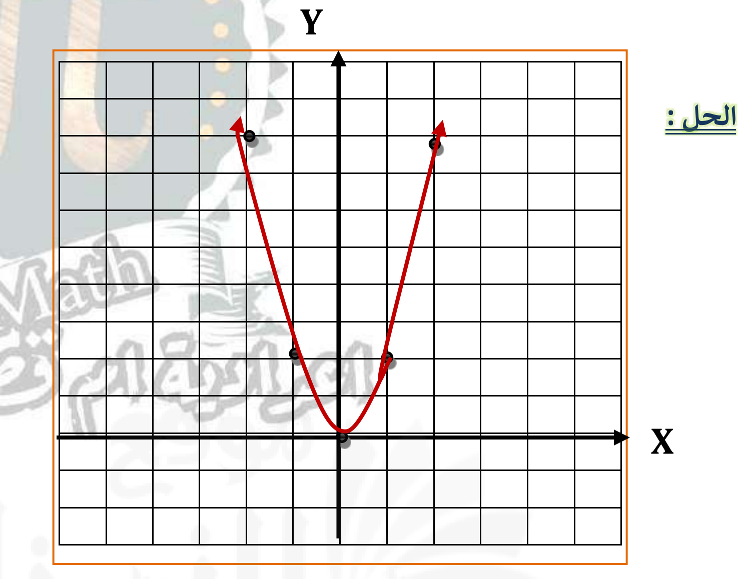


27 $y - 2x^2 = 0$

الحل :

$y = 2x^2$

x	$y = 2x^2$	y	(x,y)
1	$2(1)^2$	2	$(1,2)$
2	$2(2)^2$	8	$(2,8)$
0	$2(0)^2$	0	$(0,0)$
-1	$2(-1)^2$	2	$(-1,2)$
-2	$2(-2)^2$	8	$(-2,8)$



اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين
اعدادية أم قصر للبنين
رقم الهاتف // 07703153998



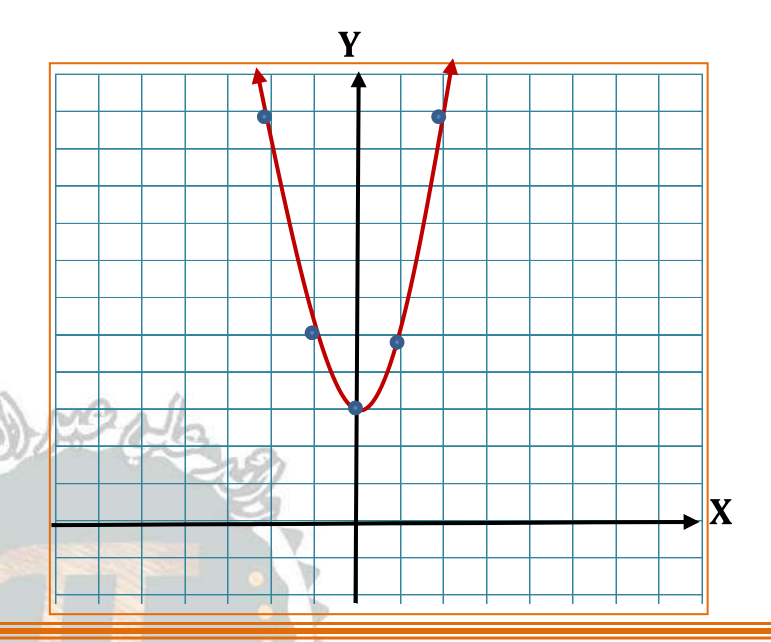
28 $3y - 6x^2 - 9 = 0$

الحل :

$3y = 6x^2 + 9 \;\; \} \div 3$

$y = 2x^2 + 3$

x	$y = 2x^2 + 3$	y	(x,y)
1	$2(1)^2 + 3$	5	(1,5)
2	$2(2)^2 + 3$	11	(2,11)
0	$2(0)^2 + 3$	3	(0,3)
−1	$2(-1)^2 + 3$	5	(−1,5)
−2	$2(-2)^2 + 3$	11	(−2,11)

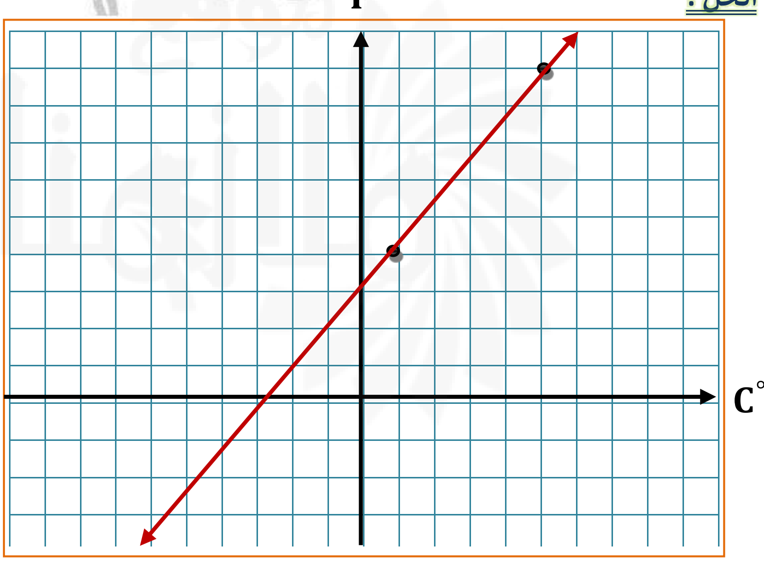


تدرب وحل مسائل حياتية

29 درجات حرارة : المعادلة $F^\circ = \frac{9}{5}C^\circ + 32$ تبين العلاقة بين درجات الحرارة السيليزية ودرجات الحرارة الفهرنهايتية لها , مثل المعادلة بيانيا .

الحل :

C°	$F^\circ = \frac{9}{5}C^\circ + 32$	(F°, C°)
0	$\frac{9}{5}(0) + 32 = 32$	(0, 32)
5	$\frac{9}{5}(5) + 32 = 41$	(5, 41)

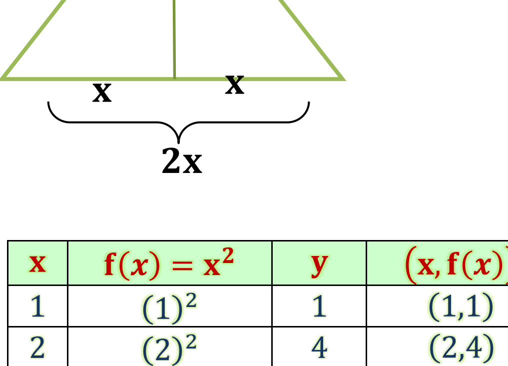


30 هندسة : مثلث قائم الزاوية متساوي الساقين طول ضلعه القائم x وحدة , f(x) تمثل مساحته .

i) اكتب العلاقة f(x) بدلالة x. ii) مثل العلاقة f(x) في المستوي الإحداثي .



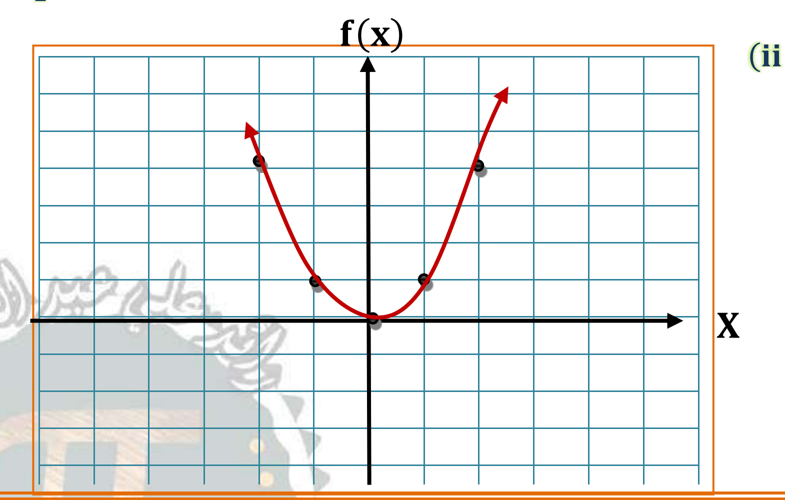
الحل :



i) المساحة $= \frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

$$f(x) = \frac{1}{2}(x)(2x) = x^2$$

ii)



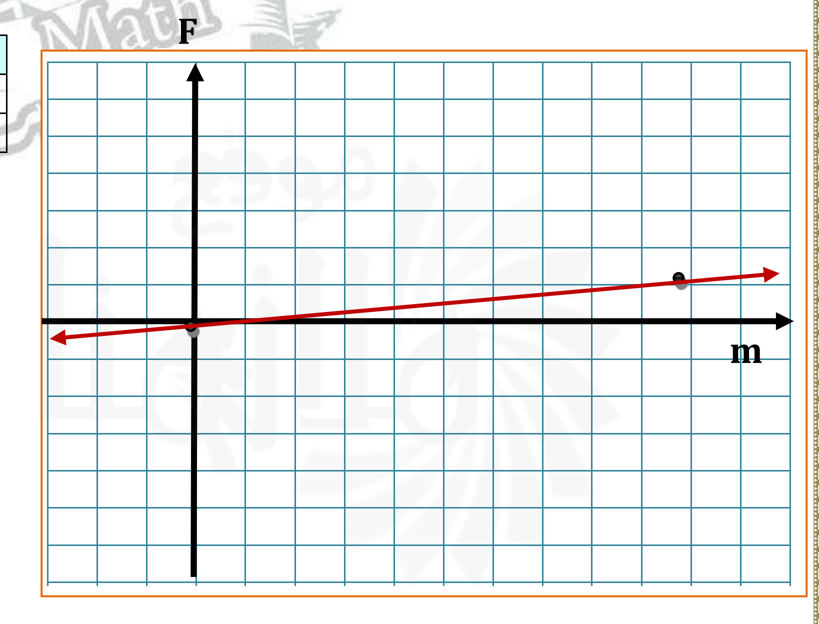
x	$f(x) = x^2$	y	$(x, f(x))$
1	$(1)^2$	1	(1,1)
2	$(2)^2$	4	(2,4)
0	$(0)^2$	0	(0,0)
−1	$(-1)^2$	1	(−1,1)
−2	$(-2)^2$	4	(−2,4)

---

31 فيزياء : يمثل القانون $F = 9.8m$ القوة الناجمة عن تأثير جاذبية الأرض على جسم حيث F القوة بالنيون m كتلة الجسم بالكيلوغرام مثل القانون بالمستوي الإحداثي ؟

الحل :

m	$F = 9.8m$	(F, m)
0	$9.8(0) = 0$	(0,0)
1	$9.1(1) = 9.8$	(1,9.8)

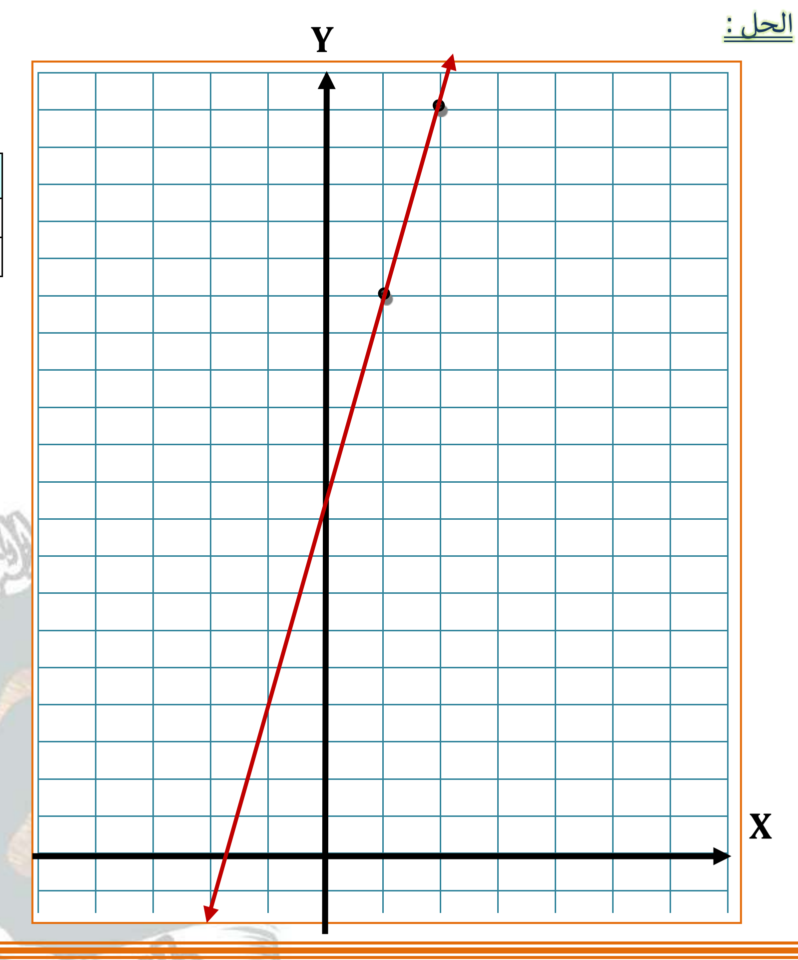


32 اعمال : تتقاضى شركة معدات بناء 10 الاف دينار كتأمين يضاف اليها 5 الاف دينار عن كل ساعة . اكتب المعادلة التي تعبر عن المسألة ثم مثلها بيانيا في المستوي الإحداثي ؟

الحل :

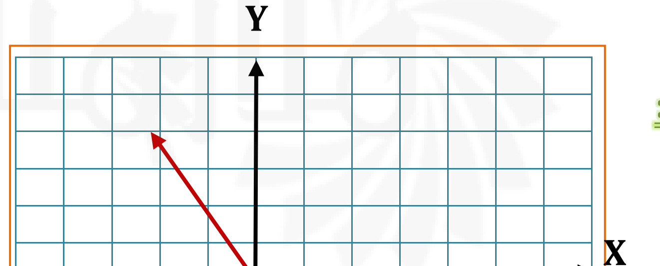
$y = 10 + 5x$

x	$y = 10 + 5x$	(x, y)
1	$10 + 5(1) = 15$	$(1, 15)$
2	$10 + 5(2) = 20$	$(2, 20)$





فكر



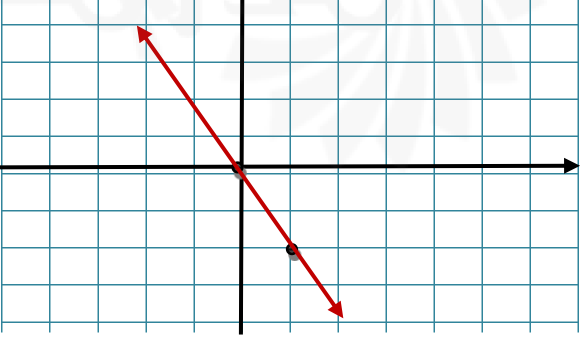
33 تحد : مثل المعادلات التالية في المستوي الإحداثي :

الحل :

1 $y(x + 1) = x(y - 2)$

$yx + y = xy - 2x \Rightarrow y = -2x$

x	$y = -2x$	(x, y)
0	$-2(0) = 0$	$(0,0)$
1	$-2(1) = -2$	$(1, -2)$

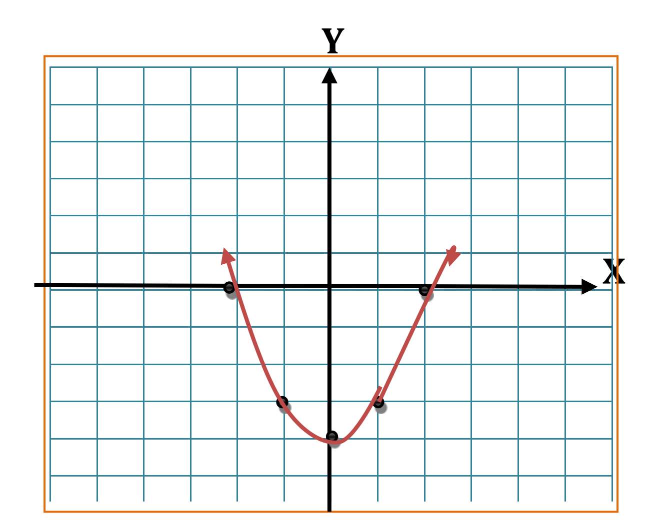


2 $y = (x-2)(x+2)$

الحل :

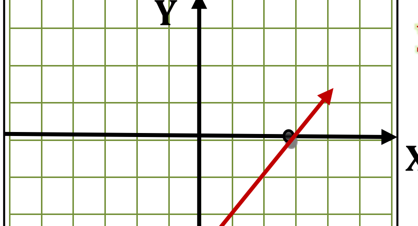
$y = x^2 - 4$

x	$y = x^2 - 4$	y	(x, y)
1	$(1)^2 - 4$	-3	$(1, -3)$
2	$(2)^2 - 4$	0	$(2, 0)$
0	$(0)^2 - 4$	-4	$(0, -4)$
-1	$(-1)^2 - 4$	-3	$(-1, -3)$
-2	$(-2)^2 - 4$	0	$(-2, 0)$



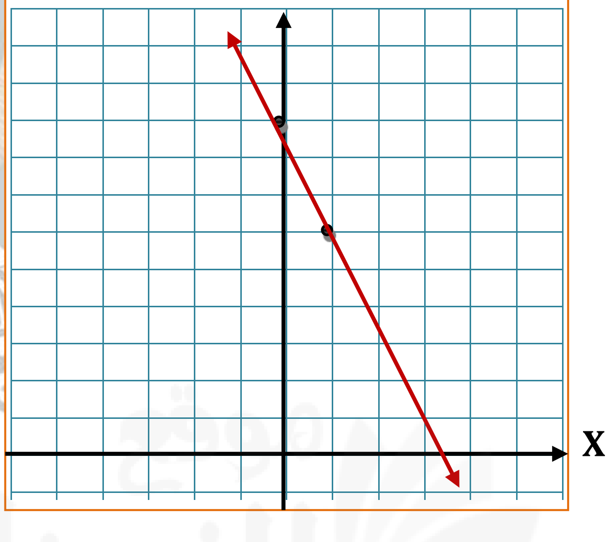
---

34 **اكتشف الخطأ :** مثل محمد المعادلة الخطية التالية : $y = -3x + 9$ بالشكل البياني المجاور . اكتشف خطأ محمد وصححه .



الحل :

x	$y = -3x + 9$	(x, y)
0	$-3(0) + 9 = 9$	$(0, 9)$
1	$-3(1) + 9 = 6$	$(1, 6)$





مسألة مفتوحة : أعط مثالا لمعادلة خطية على صورة $ax + by + c = 0$ لكل حالة :

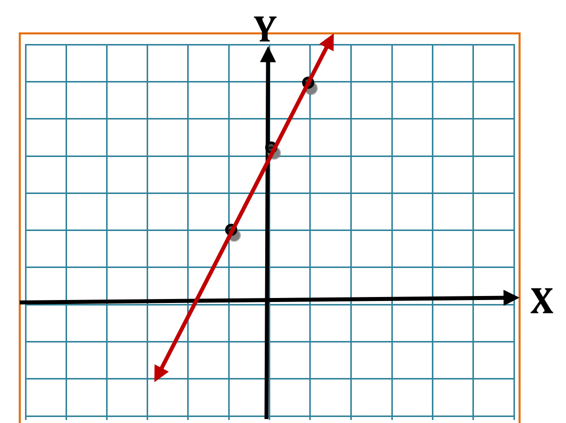
i) $a = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y + 6 = 0$

ii) $b = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x + 8 = 0$

iii) $c = 0 \quad \Rightarrow \quad 10x + 5y = 0$

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

36 تجد : شكلت الأزواج المرتبة التالية $(0,4),(1,6),(-1,2)$ مستقيما , ما هي نقطة تقاطع هذا المستقيم مع محور السينات ؟



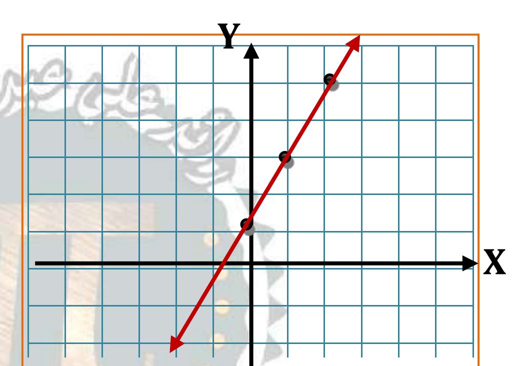
الحل :

نقطة تقاطع المستقيم هي $(-2,0)$

---

37 مسألة مفتوحة : أختر دالة خطية ومثلها بيانيا واكتب ثلاثة أزواج مرتبة تحققها .

الحل :



$y = 2x + 1$

x	$y = 2x + 1$	(x, y)
0	$2(0) + 1 = 1$	$(0,1)$
1	$2(1) + 1 = 3$	$(1,3)$
2	$2(2) + 1 = 5$	$(2,5)$

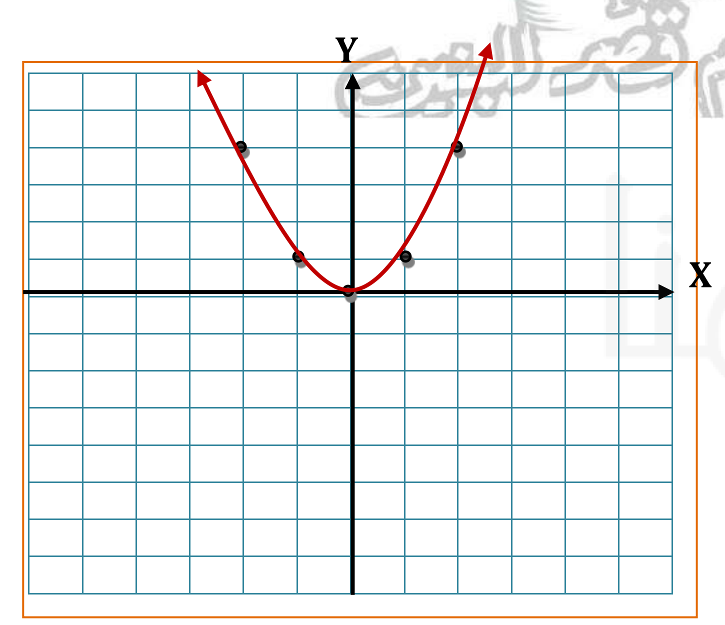
الأزواج المرتبة هي : $(0,1),(1,3),(2,5)$



38 تبرير : بين اذا كانت الأزواج المرتبة الآتية : $\{(2,4),(1,1),(0,0),(-1,1),(-2,4)\}$ تمثل دالة خطية أم تربيعية .

الحل :

تمثل دالة خطية تربيعية



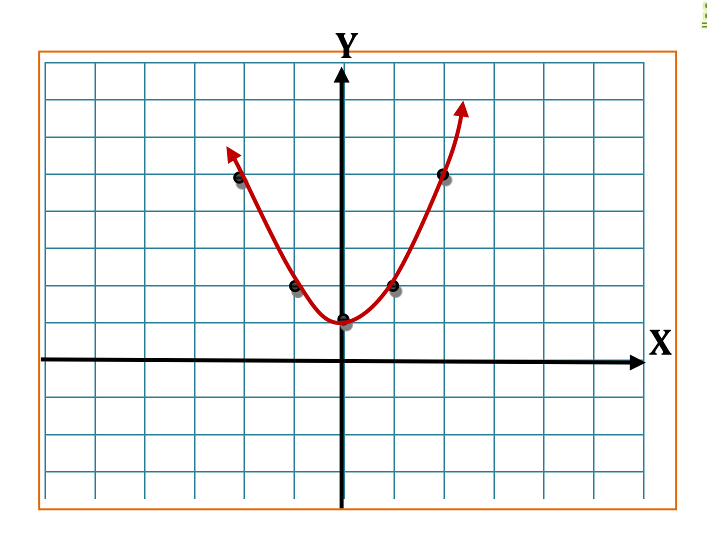
اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998

39 حس عددي : $y = x + 1$, $y = x^2 + 1$ ايهما تمثل دالة تربيعية ؟ وضح ذللك .

الحل :

$y = x^2 + 1$ تمثل دالة تربيعية

x	$y = x^2 + 1$	y	(x, y)
1	$(1)^2 + 1$	2	(1, 2)
2	$(2)^2 + 1$	5	(2, 5)
0	$(0)^2 + 1$	1	(0, 1)
−1	$(-1)^2 + 1$	2	(−1, 2)
−2	$(-2)^2 + 1$	5	(−2, 5)

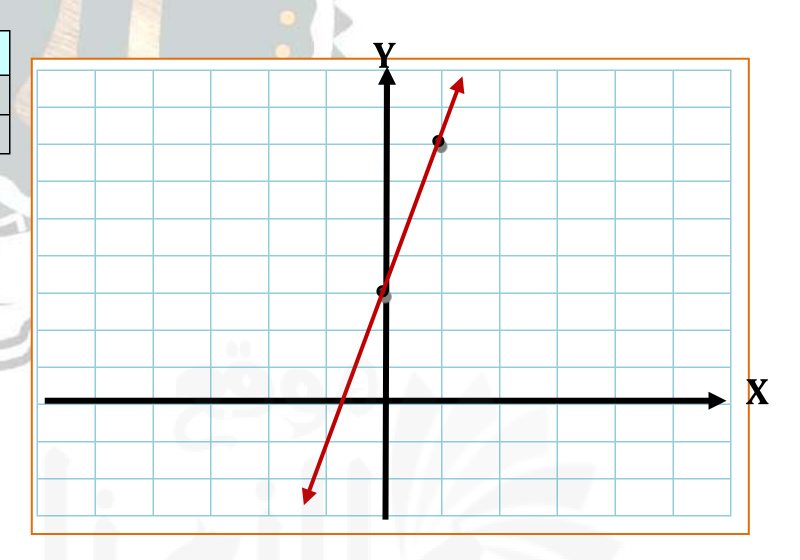


اكتب كيف تبين أن $y = 4x + 3$ معادلة خطية ؟

الحل :

وذلك من خلال تمثيلها بالمستوي الإحداثي حيث تمثل مستقيما .

x	$y = 4x + 3$	(x, y)
0	$4(0) + 3 = 3$	(0, 3)
1	$4(1) + 3 = 7$	(1, 7)



ميل المستقيم

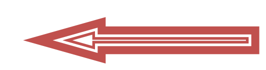
إيجاد ميل المستقيم

الميل : يعرف ميل المستقيم غير الرأسي بأنه النسبة بين التغير العمودي والتغير الأفقي .

التغير العمودي : هو التغير الصادي ويساوي $y_2 - y_1$

التغير الأفقي : هو التغير السيني ويساوي $x_2 - x_1$

الميل = $\frac{\text{التغير الصادي}}{\text{التغير السيني}}$



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad , \quad x_2 \neq x_1$$

m : هو ميل المستقيم المار بالنقطتين $y_1), (x_2, y_2)$

يمكن أن يكون ميل المستقيم موجبا أو سالبا اذا لم يكون أفقيا أو رأسيا وقد يكون صفرا (أفقيا) او غير معرف (رأسيا) .

ملاحظة :

1) اذا كان الميل موجب (المستقيم نحو الأعلى) عند التحريك من اليسار الى اليمين قيم y تتزايد .

2) اذا كان الميل سالب (المستقيم نحو الأسفل) عند التحريك من اليسار الى اليمين قيم y تتناقص .

3) اذا كان الميل صفر (المستقيم أفقي) يوازي محور السينات قيم y ثابتة .

4) اذا كان الميل غير معرف (المستقيم شاقولي) يوازي محور الصادات وقيم x ثابتة

مثال جد ميل المستقيم المار بالنقطتين في كل مما يأتي :


1 $A(5,7)$, $B(-2,1)$

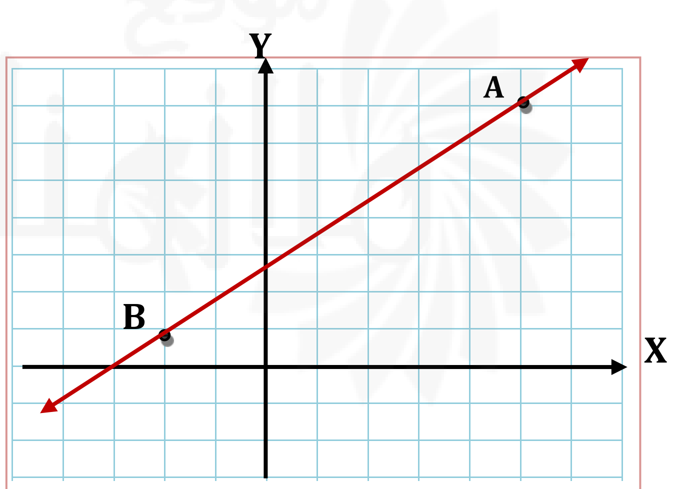
الحل :

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

$A(5,7)$, $B(-2,1)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

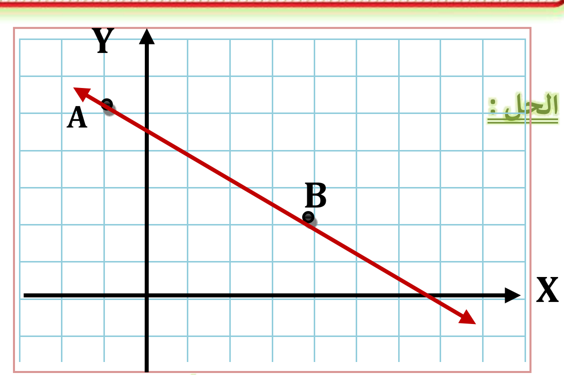
$$m = \frac{1-7}{-2-5} = \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7}$$



الميل موجب (المستقيم نحو الأعلى) عند التحريك من اليسار الى اليمين قيم y تتزايد .



2 $A(-1,5)\ ,B(4,2)$
$A(x_1,y_1)\ ,B(x_2,y_2)$



الحل :

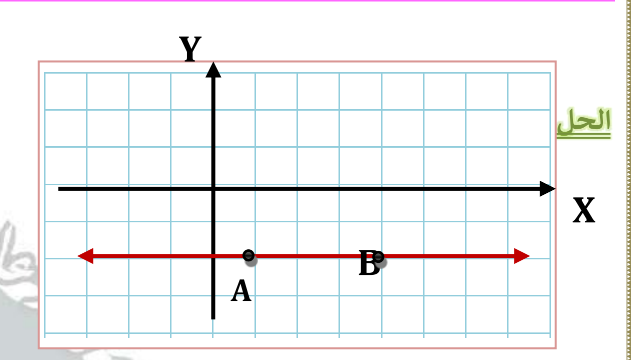
$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m=\frac{2-5}{4-(-1)}=-\frac{3}{5}$$

الميل سالب (المستقيم نحو الأسفل) عند التحريك من اليسار الى اليمين قيم y تتناقص .



3 $A(1,-2)\ ,B(4,-2)$
$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$



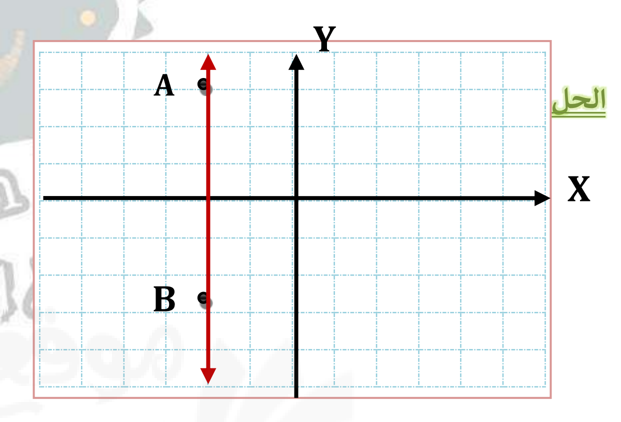
الحل

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m=\frac{-2-(-2)}{4-1}=\frac{0}{3}=0$$

الميل صفر (المستقيم أفقي) يوازي محور السينات قيم y ثابتة .

4 $A(-2,3)\ ,B(-2,-3)$
$A(x_1,y_1)\ ,B(x_2,y_2)$



الحل

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$m=\frac{-3-3}{-2-(-2)}=\frac{-6}{5}$ غير معرف

الميل غير معرف (المستقيم شاقولي) يوازي محور الصادات وقيم x ثابتة

مثال يمثل الجدول المجاور تغير في درجات الحرارة بالزمن (الساعات) جد ميل المستقيم واشرح ما يعنيه.

درجات الحرارة	الزمن (الساعات)
−2	1
1	2
4	3
10	5

الحل :

نختار أي نقطتين من الجدول ولتكن : $(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$
$(1,-2)\ ,(3,4)$

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين


07703153998

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-2)}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$$

ميل المستقيم 3 فأن درجات الحرارة تزداد 3 درجات سيليزية كل ساعة .

تقاطع المستقيم مع المحورين في المستوي الإحداثي

يمكن تمثيل معادلة المستقيم $ax + by = c$ من خلال نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين .

المقطع السيني : هو قيمة x من تقاطع المستقيم مع محور السينات أي بالتعويض $y = 0$ في معادلة المستقيم ونقطة التقاطع $(x, 0)$.

المقطع الصادي : هو قيمة y من نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات أي بالتعويض $x = 0$ في معادلة المستقيم ونقطة التقاطع $(0, y)$.

مثال جد المقطع السيني والصادي للمستقيم $3x + 5y = 15$

الحل :

المقطع الصادي

المعادلة $3x + 5y = 15$

$x = 0 \Longrightarrow 3(0) + 5y = 15$

$5y = 15$

$y = \frac{15}{5} = 3$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, 3)$

المقطع السيني

المعادلة $3x + 5y = 15$

$y = 0 \Longrightarrow 3x + 5(0) = 15$

$3x = 15$

$x = \frac{15}{3} = 5$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(5, 0)$

مثال جد المقطع السيني والصادي أن وجد لكل مما يأتي :


1) $x = -2$

الحل : تمثل المقطع السيني ونقطة التقاطع $(-2, 0)$ والمستقيم يوازي محور الصادات .

2) $y = 4$

الحل : تمثل المقطع الصادي ونقطة التقاطع $(0, 4)$ والمستقيم يوازي محور السينات .



تأكد من فهمك

جد ميل المستقيم المار بالنقطتين , هل الميل موجبا أو سالبا أو صفرا أو غير معرف ثم حدد اتجاه حركته لكل مما يأتي

1 $(-2,-2),(-4,1)$

$(x_1,y_1)\quad,(x_2,y_2)$

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-(-2)}{-4-(-4)}=\frac{1+2}{-4+2}=-\frac{3}{2}$$

الميل موجب (المستقيم نحو الأعلى) عند التحريك من اليسار الى اليمين قيم y تتزايد .

---

2 $(0,0),(3,2)$

$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-0}{3-0}=\frac{2}{3}$$

الميل موجب (المستقيم نحو الأعلى) عند التحريك من اليسار الى اليمين قيم y تتزايد .

---

3 $(-4,4),(2,-5)$

$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-5-4}{2-(-4)}=\frac{-9}{6}=-\frac{3}{2}$$

الميل سالب (المستقيم نحو الأسفل) عند التحريك من اليسار الى اليمين قيم y تتناقص .

---

4 $(5,0),(0,2)$

$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-0}{0-5}=-\frac{2}{5}$$

الميل سالب (المستقيم نحو الأسفل) عند التحريك من اليسار الى اليمين قيم y تتناقص .

---

5 $(4,3),(4,-3)$

$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-3-3}{4-4}=\frac{-6}{0}$$





الميل غير معرف (المستقيم شاقولي) يوازي محور الصادات وقيم x ثابتة

6 $(-6,-1),(-2,-1)$

$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-1-(-1)}{-2-(-6)}=\frac{0}{4}=0$$

الميل صفر (المستقيم أفقي) يوازي محور السينات قيم y ثابتة .

7 $(0,0),(-1,0)$

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-0}{-1-0}=\frac{0}{-1}=0$$

الميل صفر (المستقيم أفقي) يوازي محور السينات قيم y ثابتة .

8 $(-2,-1),(0,-3)$

$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-3-(-1)}{0-(-2)}=\frac{-3+1}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

الميل سالب (المستقيم نحو الأسفل) عند التحريك من اليسار الى اليمين قيم y تتناقص .

9 $(-6,-1),(-6,1)$

$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-(-1)}{-6-(-6)}=\frac{1+1}{-6+6}=\frac{2}{0}$$

الميل غير معرف (المستقيم شاقولي) يوازي محور الصادات وقيم x ثابتة

10 $(2,3),(0,1)$

$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-3}{0-2}=\frac{-2}{-2}=1$$

الميل موجب (المستقيم نحو الأعلى) عند التحريك من اليسار الى اليمين قيم y تتزايد .

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين   07703153998

جد المقطع السيني والمقطع الصادي لكل مما يأتي :

11 $3x + 6y = 18$

الحل :

المقطع الصادي

المعادلة $3x + 6y = 18$

$x = 0 \Rightarrow 3(0) + 6y = 18$

$6y = 18$

$y = \frac{18}{6} = 3$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, 3)$

المقطع السيني

المعادلة $3x + 6y = 18$

$y = 0 \Rightarrow 3x + 6(0) = 18$

$3x = 18$

$x = \frac{18}{3} = 6$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(6, 0)$

12 $y + 2 = 5x - 4$

الحل :

المقطع الصادي

المعادلة $y + 2 = 5x - 4$

$x = 0 \Rightarrow y + 2 = 5(0) - 4$

$y + 2 = -4$

$y = -4 - 2$

$y = -6$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, -6)$

المقطع السيني

المعادلة $y + 2 = 5x - 4$

$y = 0 \Rightarrow 0 + 2 = 5x - 4$

$5x - 4 = 2$

$5x = 2 + 4 \Rightarrow 5x = 6$

$x = \frac{6}{5}$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $\left(\frac{6}{5}, 0\right)$

13 $y = -4x$

الحل :

المقطع الصادي

المعادلة $y = -4x$

$x = 0 \Rightarrow y = -4(0) \Rightarrow y = 0$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, 0)$

المقطع السيني

المعادلة $y = -4x$

$y = 0 \Rightarrow 0 = -4x \Rightarrow x = 0$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(0, 0)$

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998


14 $y = -x + 8$

الحل :

المقطع الصادي

المعادلة $y = -x + 8$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 + 8$

$y = 8$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, 8)$

المقطع السيني

المعادلة $y = -x + 8$

$y = 0 \Rightarrow 0 = -x + 8$

$x = 8$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(8, 0)$

15 $5x = y - 8$

الحل :

المقطع الصادي

المعادلة $5x = y - 8$

$x = 0 \Rightarrow 5(0) = y - 8$

$0 = y - 8$

$y = 8$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, 8)$

المقطع السيني

المعادلة $5x = y - 8$

$y = 0 \Rightarrow 5x = 0 - 8$

$5x = -8$

$x = -\frac{8}{5}$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $\left(-\frac{8}{5}, 0\right)$

16 $y = -\frac{3}{4}x - 5$

الحل :

المقطع الصادي

المعادلة $y = -\frac{3}{4}x - 5$

$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}(0) - 5$

$y = -5$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, -5)$

المقطع السيني

المعادلة $y = -\frac{3}{4}x - 5$

$y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{3}{4}x - 5$

$\frac{3}{4}x = -5 \Rightarrow 3x = -20$

$x = -\frac{20}{3}$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $\left(-\frac{20}{3}, 0\right)$



17 $2x + 6y = 12$

الحل :

المقطع الصادي

المعادلة $2x + 6y = 12$

$x = 0 \Rightarrow 2(0) + 6y = 12$

$6y = 12$

$y = \frac{12}{6} = 2$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, 2)$

المقطع السيني

المعادلة $2x + 6y = 12$

$y = 0 \Rightarrow 2x + 6(0) = 12$

$2x = 12$

$x = \frac{12}{2} = 6$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(6, 0)$

---

18 $y + 4 = 2x - 4$

الحل :

المقطع الصادي

المعادلة $y + 4 = 2x - 4$

$x = 0 \Rightarrow y + 4 = 2(0) - 4$

$y + 4 = -4$

$y = -4 - 4$

$y = -8$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, -8)$

المقطع السيني

المعادلة $y + 4 = 2x - 4$

$y = 0 \Rightarrow \quad 0 + 4 = 2x - 4$

$2x - 4 = 4$

$2x = 4 + 4 \quad \Rightarrow \quad 2x = 8$

$x = \frac{8}{2} = 4$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(4, 0)$

---

19 $y = -5x$

الحل :

المقطع الصادي

المعادلة $y = -5x$

$x = 0 \Rightarrow y = -5(0) \Rightarrow y = 0$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, 0)$

المقطع السيني

المعادلة $y = -5x$

$y = 0 \Rightarrow 0 = -5x \Rightarrow x = 0$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(0, 0)$

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998

20 $y = 6x$

الحل :

المقطع الصادي

المعادلة $y = 6x$

$x = 0 \Rightarrow y = 6(0) \Rightarrow y = 0$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, 0)$

المقطع السيني

المعادلة $y = 6x$

$y = 0 \Rightarrow 0 = 6x \Rightarrow x = 0$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(0, 0)$

21 $x + y = 4$

الحل :

المقطع الصادي

المعادلة $x + y = 4$

$x = 0 \Rightarrow 0 + y = 4$

$y = 4$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, 4)$

المقطع السيني

المعادلة $x + y = 4$

$y = 0 \Rightarrow x + 0 = 4$

$x = 4$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(4, 0)$

22 $3y = 2x - 6$

الحل :

المقطع الصادي

المعادلة $3y = 2x - 6$

$x = 0 \Rightarrow 3y = 2(0) - 6$

$3y = -6$

$y = -\frac{6}{3} = -2$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, -2)$

المقطع السيني

المعادلة $3y = 2x - 6$

$y = 0 \Rightarrow 3(0) = 2x - 6$

$2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6$

$x = \frac{6}{2} = 3$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(3, 0)$

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998

23 $y = -\frac{1}{2}x + 4$

الحل :

المقطع الصادي	المقطع السيني
المعادلة $y = -\frac{1}{2}x + 4$	المعادلة $y = -\frac{1}{2}x + 4$
$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}(0) + 4$	$y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}x + 4$
$y = 4$	$\frac{1}{2}x = 4 \Rightarrow x = 8$
نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, 4)$	نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(8, 0)$

24 $x + \frac{1}{3}y = -1$

الحل :

المقطع الصادي	المقطع السيني
المعادلة $x + \frac{1}{3}y = -1$	المعادلة $x + \frac{1}{3}y = -1$
$x = 0 \Rightarrow 0 + \frac{1}{3}y = -1$	$y = 0 \Rightarrow x + \frac{1}{3}(0) = -1$
$\frac{1}{3}y = -1 \Rightarrow y = -3$	$x = -1$
نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, -3)$	نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(-1, 0)$

تدرب وحل التمرينات

جد ميل المستقيم المار بالنقطتين , هل الميل موجبا أو سالبا أو صفرا أو غير معرف ثم حدد اتجاه حركته لكل مما يأتي

25 $(4, 4)\ ,\ (2, 3)$
$(x_1, y_1)\ ,\ (x_2, y_2)$

الحل :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 4}{2 - 4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

الميل موجب (المستقيم نحو الأعلى) عند التحريك من اليسار الى اليمين قيم y تتزايد .

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين   07703153998

26 $(6,2)$, $(0,2)$

(x_1,y_1) , (x_2,y_2)

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-2}{0-6}=\frac{0}{-6}=0$$

الميل صفر (المستقيم أفقي) يوازي محور السينات قيم y ثابتة .

---

27 $(-2,4)$, $(5,5)$

(x_1,y_1) , (x_2,y_2)

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5-4}{5-(-2)}=\frac{1}{7}$$

الميل موجب (المستقيم نحو الأعلى) عند التحريك من اليسار الى اليمين قيم y تتزايد .

---

28 $(-2,-3)$, $(2,4)$

(x_1,y_1) , (x_2,y_2)

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-(-3)}{2-(-2)}=\frac{4+3}{2+2}=\frac{7}{4}$$

الميل موجب (المستقيم نحو الأعلى) عند التحريك من اليسار الى اليمين قيم y تتزايد .

---

29 $(3,-5)$, $(0,0)$

(x_1,y_1) , (x_2,y_2)

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-(-5)}{0-3}=-\frac{5}{3}$$

الميل سالب (المستقيم نحو الأسفل) عند التحريك من اليسار الى اليمين قيم y تتناقص .

---

30 $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{4}\right)$

(x_1,y_1) , (x_2,y_2)

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{2}{4}}{0}$$

الميل غير معرف (المستقيم شاقولي) يوازي محور الصادات وقيم x ثابتة

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين

07703153998


جد المقطع السيني والمقطع الصادي لكل مما يأتي :

31 $2x + 4y = 12$

الحل :

المقطع الصادي

$2x + 4y = 12$ المعادلة

$x = 0 \Rightarrow 2(0) + 4y = 12$

$4y = 12$

$y = \frac{12}{4} = 3$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, 3)$

المقطع السيني

$2x + 4y = 12$ المعادلة

$y = 0 \Rightarrow 2x + 4(0) = 12$

$2x = 12$

$x = \frac{12}{2} = 6$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(6, 0)$



32 $3y - 7x = 9$

الحل :

المقطع الصادي

$3y - 7x = 9$ المعادلة

$x = 0 \Rightarrow 3y - 7(0) = 9$

$3y = 9$

$y = \frac{9}{3} = 3$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, 3)$

المقطع السيني

$3y - 7x = 9$ المعادلة

$y = 0 \Rightarrow 3(0) - 7x = 9$

$-7x = 9$

$x = -\frac{9}{7}$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $\left(-\frac{9}{7}, 0\right)$

33 $y = -3.5x + 2$

لحل :

المقطع الصادي

$y = -3.5x + 2$ المعادلة

$x = 0 \Rightarrow y = -3.5(0) + 2$

$y = 2$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, 2)$

المقطع السيني

$y = -3.5x + 2$ المعادلة

$y = 0 \Rightarrow 0 = -3.5x + 2$

$3.5x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3.5} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $\left(\frac{4}{7}, 0\right)$

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998

34 $y = -\frac{3}{4}x$

الحل :

المقطع الصادي

المعادلة $y = -\frac{3}{4}x$

$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}(0) \Rightarrow y = 0$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, 0)$

المقطع السيني

المعادلة $y = -\frac{3}{4}x$

$y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{3}{4}x \Rightarrow x = 0$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(0, 0)$

35 $y + x = -4$

الحل :

المقطع الصادي

المعادلة $y + x = -4$

$x = 0 \Rightarrow y + 0 = -4$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, -4)$

المقطع السيني

المعادلة $y + x = -4$

$y = 0 \Rightarrow 0 + x = -4$

$x = -y = -4$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $(-4, 0)$

36 $4x = y + 3$

الحل :

المقطع الصادي

المعادلة $4x = y + 3$

$x = 0 \Rightarrow 4(0) = y + 3$

$0 = y + 3$

$y = -3$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي : $(0, -3)$

المقطع السيني

المعادلة $4x = y + 3$

$y = 0 \Rightarrow 4x = 0 + 3$

$4x = 3$

$x = \frac{3}{4}$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي : $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$

تدرب وحل مسائل حياتية

كمية السائل المتسرب	
الزمن (ثوان)	حجم السائل m^3
10	40
13	52
16	64
19	76

37 فيزياء : يمثل الجدول المجاور كمية السائل المتدفق من حوض خلال فترة زمنية , جد ميل المستقيم الذي يمثله الجدول . وفسر ما يعنيه .

الحل :

نختار أي نقطتين من الجدول ولتكن : $(x_1, y_1) = (40, 10)$, $(x_2, y_2) = (64, 16)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{16 - 10}{64 - 40} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

ميل المستقيم $\frac{1}{4}$ فأن كمية السائل المتدفق من الحوض $\frac{1}{4}$ متر (ربع متر) لكل ثانية .

---

38 نبات : اذا كان طول نبتة 30cm في غضون كل شهرين تنمو بمقدار ثابت 4cm أخرى .

الزمن	0	2	4
طول النبتة			

i) اكمل الجدول .

ii) ما ميل المستقيم الذي تمثله العلاقة بين طول النبتة والزمن .

iii) اكتب الدالة الخطية الذي يمثله الجدول .

iv) مثل الدالة في المستوي الإحداثي .

الحل :

i)

الزمن	0	2	4
طول النبتة	26	30	34

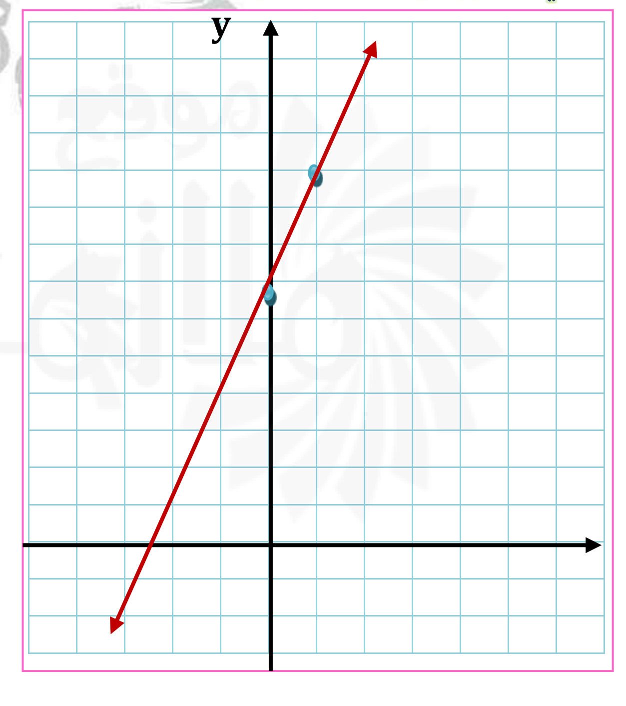
ii) نختار أي نقطتين من الجدول ولتكن : $(x_1, y_1) = (0, 26)$, $(x_2, y_2) = (4, 34)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{34 - 26}{4 - 0} = \frac{8}{4} = 2$$

iii) $y = 2x + 26$ الدالة الخطية

iv)

x	$y = 2x + 26$	(x, y)
0	$2(0) + 26 = 26$	(0,26)
1	$2(1) + 26 = 28$	(1,28)



فكر

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

39 تحدٍ : جد قيمة a التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(1,6)$, $(-5,a)$ يساوي $\frac{1}{2}$

الحل :

(x_1,y_1) , (x_2,y_2)

$(1,6)$, $(-5,a)$, $m=\frac{1}{2}$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{a-6}{-5-1} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{a-6}{-6}$$ الطرفين في الوسطين

$$2a-12=-6 \Rightarrow 2a=-6+12$$

$$2a=6 \Rightarrow a=\frac{6}{2}=3$$

40 تفكير ناقد : هل يمكنك تحديد ميل مستقيم يمر بالنقطتين $(7,3)$, $(7,-3)$ ؟

الحل :

(x_1,y_1) , (x_2,y_2)

$(7.-3)$, $(7,3)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-(-3)}{7-7}=\frac{6}{0}$$ غير معرف

كلا : لا يمكن تحديد ميل المستقيم

41 اكتشف الخطأ : ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,-1)$, $(0,3)$ هو : $\frac{3}{4}=\frac{3-0}{3-(-1)}$ اكتشف الخطأ وصححه .

الحل :

(x_1,y_1) , (x_2,y_2)

$(0,3)$, $(3,-1)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-1-3}{3-0}=-\frac{4}{3}$$

42 حس عددي : كيف تفسر ان تحديد ميل مستقيم لا يتأثر باختيار النقطتين عليه ؟

الحل :

ذلك بأخذ أي نقطتين سوف يكون الميل أما موجبا أو سالبا أو صفرا أو غير معرف ويكون اتجاه حركته من اليسار الى اليمين . وقيم y تتزايد اذا كان الميل موجبا وتتناقص اذا كان الميل سالبة وتبقى ثابتة اذا كان الميل صفرا وتبقى قيمة x ثابتة اذا كان الميل غير معرف .



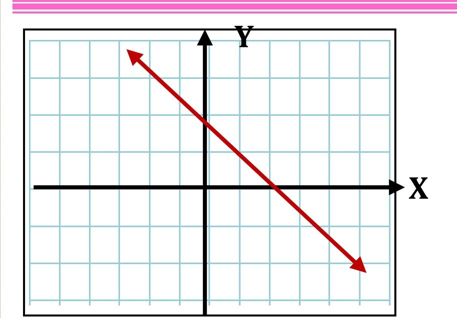
43 مسألة مفتوحة : اذكر نقطتين على مستقيم يكون ميله $= -\frac{1}{3}$

الحل :

(x_1, y_1) , (x_2, y_2)
$(3,2)$, $(6,1)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-2}{6-3} = -\frac{1}{3}$$

44 تفكير ناقد : من الشكل البياني المجاور حدد اتجاه المستقيم ؟



الحل :

المستقيم نحو الأسفل عند التحريك من اليسار الى اليمين وقيم y تتناقص .

اكتب بأسلوبك ماذا يعني الميل يساوي صفرا والميل غير معرف ؟

الحل :

الميل يساوي صفر يعني المستقيم أفقي ويوازي محور السينات وقيم y ثابتة .

الميل غير معرف يعني المستقيم شاقولي ويوازي محور الصادات وقيم x ثابتة .

معادلة المستقيم

كتابة معادلة مستقيم بمعرفة نقطتين منه

يمكن كتابة معادلة المستقيم المار بالنقطتين $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ باستخدام القانون :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

هذه المعادلة تمثل معادلة المستقيم AB

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998

مثال يقطع راكب دراجة هوائية 20 كيلومترا في ساعتين ويقطع 50 كيلومترا في خمس ساعات . ما المعادلة الخطية التي تربط بين المسافة والزمن ؟

الحل :

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$
$(2, 20), (5, 50)$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 20}{x - 2} = \frac{50 - 20}{5 - 2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y - 20}{x - 2} = \frac{30}{3}$$

$$\frac{y - 20}{x - 2} = 10$$ الطرفين في الوسطين

$$y - 20 = 10x - 20 \quad \Rightarrow \quad y - 10x = -20 + 20$$

$$y - 10x = 0$$ معادلة المستقيم

كتابة معادلة المستقيم بمعرفة ميله ونقط منه

يمكن كتابة معادلة مستقيم بمعرفة ميله m والنقطة (x_1, y_1) باستعمال معادلة :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال استعمل معادلة الميل والنقطة لكل مستقيم لتحديد ميله والنقطة المار بها :

1 $y - 3 = -5(x - 2)$

الحل :

$$y - 3 = -5(x - 2)$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
بالمقارنة معادلة الميل – النقطة

$$m = -5 , (x_1, y_1) = (2, 3)$$

2 $y + 7 = \frac{2}{5}x$

الحل :

$$y + 7 = \frac{2}{5}(x - 0)$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
بالمقارنة معادلة الميل – النقطة

$$m = \frac{2}{5} , (x_1, y_1) = (0, -7)$$

مثال جد معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{1}{2}$ ومقطعه السيني يساوي 1 –

الحل :

$$m = \frac{1}{2} \ , x_1 = -1 \ , y_1 = 0 \ \Rightarrow \ (x_1, y_1) \ (-1, 0)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - (-1)) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}(x + 1)$$

$$2y = x + 1 \quad \Rightarrow \quad 2y - x = 1$$ معادلة المستقيم

كتابة معادلة المستقيم بمعرفة ميله مقطعه مع أحد المحورين

معادلة المستقيم بدلالة ميله m ومقطعه الصادي k هي : $y = mx + k$

مثال استعمل معادلة الميل والمقطع لكل مستقيم لتحديد ميله ومقطعه :

1 $y = x$

الحل :

$$y = 1x + 0$$
$$y = mx + k$$
بالمقارنة معادلة الميل – المقطع

$$m = 1 \ , k = 0$$

2 $y = 0$

الحل :

$$y = 0x + 0$$
$$y = mx + k$$
بالمقارنة معادلة الميل – المقطع

$$m = 0 \ , k = 0$$

3 $2x + 3y = 6$

الحل :

$$3y = -2x + 6 \ \} \div 3$$

$$y = \frac{-2}{3}x + 2$$
$$y = mx + k$$
بالمقارنة معادلة الميل – المقطع

$$m = \frac{-2}{3} \ , k = 2$$

4 $5x = 7y + 8$

الحل :

$$7y = 5x - 8 \ \} \div 7$$

$$y = \frac{5}{7}x - \frac{8}{7}$$
$$y = mx + k$$
بالمقارنة معادلة الميل – المقطع

$$m = \frac{5}{7} \ , k = -\frac{8}{7}$$



اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

6 $y + x = 5$

الحل :

$y = -1x + 5$
$y = mx + k$
لمقارنة معادلة الميل – المقطع

$m = -1 , k = 5$

5 $y = 3x + 1$

الحل :

$y = 3x + 1$
$y = mx + k$
بالمقارنة معادلة الميل – المقطع

$m = 3 , k = 1$

مثال مستقيم يمر في النقطة $(5, -1)$ وميله $\frac{-2}{5}$ د مقطعه ومعادلته .

الحل :

الطريقة الثانية

$m = \frac{-2}{5} , (5, -1)$

بالتعويض الميل والنقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (-1) = \frac{-2}{5}(x - 5)$

$y + 1 = \frac{-2}{5}(x - 5)$

$5y + 5 = -2x + 10 \Rightarrow 5y = -2x + 10 - 5$

$5y = -2x + 5 \} \div 5$

$y = \frac{-2}{5}x + 1$ معادلة المستقيم

الطريقة اولى

$m = \frac{-2}{5} , \quad (5. -1)$

$y = mx + k$ بالتعويض الميل والنقطة

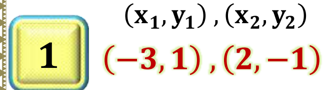
$-1 = \frac{-2}{5}(5) + k \Rightarrow -1 = -2 + k$

$k = -1 + 2 \Rightarrow k = 1$

$y = \frac{-2}{5}x + 1$ معادلة المستقيم

تأكد من فهمك

جد معادلة المستقيمات التي يمر كل منها بنقطتين فيما يلي :



$(x_1, y_1) , (x_2, y_2)$
$(-3, 1) , (2, -1)$

الحل :

$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\frac{y - 1}{x - (-3)} = \frac{-1 - 1}{2 - (-3)} \Rightarrow \frac{y - 1}{x + 3} = \frac{-2}{5}$ الطرفين في الوسطين

$5y - 5 = -2x - 6 \Rightarrow 5y + 2x = -6 + 5 \Rightarrow 5y + 2x = -1$ معادلة المستقيم



2 $(0,2),(2,-4)$

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

الحل :

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-2}{x-0}=\frac{-4-2}{2-0} \Rightarrow \frac{y-2}{x}=\frac{-6}{2} \Rightarrow \frac{y-2}{x}=-3$$ الطرفين في الوسطين

$$y-2=-3x \Rightarrow y+3x=2$$ معادلة المستقيم

3 $(-4,-2),(-5,-6)$

$(x_1,y_1) \quad ,(x_2,y_2)$

الحل :

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-(-2)}{x-(-4)}=\frac{-6-(-2)}{-5-(-4)} \Rightarrow \frac{y+2}{x+4}=\frac{-6+2}{-5+4} \Rightarrow \frac{y+2}{x+4}=\frac{-4}{-1}$$

$$\frac{y+2}{x+4}=4$$ الطرفين في الوسطين

$$y+2=4x+16 \Rightarrow y-4x=16-2 \Rightarrow y-4x=14$$ معادلة المستقيم

استعمل معادلة الميل والنقطة لكل مستقيم لتحديد ميله والنقطة المار بها :

4 $y-1=2(x-3)$

الحل :

$$y-1 = 2(x-3)$$
$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

بالمقارنة مع معادلة الميل - النقطة

$$m=2,(x_1,y_1)=(3,1)$$

5 $y+1=-x+4$

الحل :

$$y+1=-1(x-4)$$
$$y-y_1=m(x-x_1)$$

بالمقارنة مع معادلة الميل - النقطة

$$m=-1,(x_1,y_1)=(4,-1)$$

6 $y=\frac{-3}{4}(x+2)$

الحل :

$$y-0=\frac{-3}{4}(x+2)$$
$$y-y_1= m(x-x_1)$$

بالمقارنة مع معادلة الميل - النقطة

$$m=\frac{-3}{4},(x_1,y_1)=(-2,0)$$

جد معادلة المستقيم لكل مما يأتي ثم جد مقطعه :

8 $(-1,-3)\ ,\frac{1}{3}$

الحل :

$m=\frac{1}{3}\ ,\overset{(x_1,y_1)}{(-1,-3)}$

$y-y_1=m(x-x_1)$ بالتعويض الميل والنقطة

$y-(-3)=\frac{1}{3}(x-(-1))$

$y+3=\frac{1}{3}(x+1)\Rightarrow 3y+9=x+1$

$3y=x+1-9\Rightarrow 3y=x-8\}\div 3$

$y=\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}$ معادلة المستقيم

7 $(4,6)\ ,\frac{-2}{5}$

الحل :

$m=\frac{-2}{5}\ ,\ \overset{(x_1,y_1)}{(4,6)}$

$y-y_1=m(x-x_1)$ بالتعويض الميل والنقطة

$y-6=\frac{-2}{5}(x-4)$

$5y-30=-2x+8$

$5y=-2x+8+38\Rightarrow 5y=-2x+38\}\div 5$

$y=\frac{-2}{5}x+\frac{38}{5}$ معادلة المستقيم

9 $(0,0)\ ,-6$

الحل :

$m=-6\ ,\overset{(x_1,y_1)}{(0,0)}$

$y-y_1=m(x-x_1)$ بالتعويض الميل والنقطة

$y-0=-6(x-0)\quad\Rightarrow\quad y=-6x$ معادلة المستقيم

استعمل معادلة الميل والنقطة لكل مستقيم لتحديد ميله ومقطعه :

11 $y=7x$

الحل :

$-y=7x\ \}\times(-1)$

$y=-7x+0$

$y=mx+k$

بالمقارنة معادلة الميل – المقطع

$m=-7\ ,k=0$

10 $5y=-2x-1$

الحل :

$5y=-2x-1\ \}\div 5$

$y=\frac{-2}{5}x-\frac{1}{5}$

$y=mx+k$

بالمقارنة معادلة الميل – المقطع

$m=\frac{-2}{5}\ ,k=\frac{-1}{5}$

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998

12 $-4y - 8x = 16$

الحل :

$-4y = 8x + 16 \quad \} \div (-4)$

$y = -2x - 4$
$y = mx + k$ بالمقارنة معادلة الميل – المقطع

$m = -2 \ , k = -4$

تأكد من فهمك

جد معادلة المستقيمات التي تمر كل منها بنقطتين فيما يلي :

13 $(x_1, y_1) \ , (x_2, y_2)$
$(0,0) \ , (-3,7)$

الحل :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 0}{x - 0} = \frac{7 - 0}{-3 - 0} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \frac{-7}{3}$$ الطرفين في الوسطين

$3y = -7x \quad \Rightarrow \quad 3y + 7x = 0$ معادلة المستقيم

---

14 $(0,7) \ , (-5,0)$
$(x_1, y_1) \ , (x_2, y_2)$

الحل :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 7}{x - 0} = \frac{0 - 7}{-5 - 0} \quad \Rightarrow \quad \frac{y - 7}{x} = \frac{-7}{-5} \quad \Rightarrow \quad \frac{y - 7}{x} = \frac{7}{5}$$ الطرفين في الوسطين

$5y - 35 = 7x \quad \Rightarrow \quad 5y - 7x = 35$ معادلة المستقيم

---

15 $\left(\frac{1}{2}, 3\right) \ , \left(\frac{3}{2}, -1\right)$
$(x_1, y_1) \ , (x_2, y_2)$

الحل :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y-3}{x-\frac{1}{2}} = \frac{-1-3}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{y-3}{x-\frac{1}{2}} = \frac{-4}{\frac{2}{2}} \Rightarrow \frac{y-3}{x-\frac{1}{2}} = \frac{-4}{1}$$ الطرفين في الوسطين

$$y-3 = -4x + \frac{4}{2} \Rightarrow y-3 = -4x+2$$

$$y+4x = 2+3 \Rightarrow y+4x = 5$$ معادلة المستقيم

استعمل معادلة الميل والنقطة لكل مستقيم لتحديد ميله والنقطة المار بها :

17 $y - x = 8$

الحل :

$$y = x + 8$$

$$y - 0 = 1(x+8)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$ بالمقارنة مع معادلة الميل - النقطة

$$m = 1\,,(x_1, y_1) = (-8, 0)$$

16 $y + \frac{3}{2} = -5(x-8)$

الحل :

$$y + \frac{3}{2} = -5(x-8)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$ بالمقارنة مع معادلة الميل - النقطة

$$m = -5\,,(x_1, y_1) = \left(8, -\frac{3}{2}\right)$$

---

18 $\frac{3}{5}y = \frac{5}{2}(x+2)$

الحل :

$$\frac{3y}{5} = \frac{5(x+2)}{2}$$ الطرفين في الوسطين $$\Rightarrow 6y = 25(x+2)\ \}\div 6 \Rightarrow y = \frac{25}{6}(x+2)$$

$$y - 0 = \frac{25}{6}(x+2)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = \frac{25}{6}\,,(x_1, y_1) = (-2, 0)$$

معادلة المستقيم لكل مما يأتي ثم جد مقطعه :

19 $(-3, 7)$, $-3 =$ الميل

الحل :

$$m = -3\ ,\ \overset{(x_1, y_1)}{(-3, 7)} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$ بالتعويض الميل والنقطة





$y - 7 = -3(x - (-3)) \Rightarrow y - 7 = -3(x + 3) \Rightarrow y - 7 = -3x - 9$

$y = -3x - 9 + 7$

$y = -3x - 2$ معادلة المستقيم

20 $(0, -3)$ ، $\frac{1}{5}$ = الميل

الحل :

$m = \frac{1}{5}$ ، (x_1, y_1) $(0, -3)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ بالتعويض الميل والنقطة

$y - (-3) = \frac{1}{5}(x - 0) \Rightarrow y + 3 = \frac{1}{5}x$

$5y + 15 = x \Rightarrow 5y = x - 15 \} \div 5$

$y = \frac{1}{5}x - 3$ معادلة المستقيم

21 $(1, -4)$ ، $\frac{-1}{2}$ = الميل

الحل :

$m = \frac{-1}{2}$ ، (x_1, y_1) $(1, -4)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ بالتعويض الميل والنقطة

$y - (-4) = \frac{-1}{2}(x - 1)$

$y + 4 = \frac{-1}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y + 8 = -x + 1$

$2y = -x + 1 - 8 \Rightarrow 2y = -x - 7 \} \div 2$

$y = \frac{-1}{2}x - \frac{7}{2}$ معادلة المستقيم

استعمل معادلة الميل والمقطع لكل مستقيم لتحديد ميله ومقطعه :

22 $y + 7 = 3x + 5$

الحل :

$y = 3x + 5 - 7$

$y = 3x - 2$

$y = mx + k$ بالمقارنة مع معادلة الميل - المقطع

$m = 3 , k = -2$

23 $\frac{1}{3}y = -5x - 1$

الحل :

$\frac{1}{3}y = -5x - 1$

$y = -15x - 3$

$y = mx + k$ بالمقارنة مع معادلة الميل - المقطع

$m = -15 , k = -3$

24 $7y = 8x$

الحل :

$7y = 8x \} \div 7 \Rightarrow y = \frac{8}{7}x + 0$

$y = mx + y$ بالمقارنة مع معادلة الميل - المقطع

$m = \frac{8}{7} , k = 0$

تدرب وحل مسائل حياتية

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998

25 احياء : ينمو ناب الفيل طول حياته بمعدل 1cm لكل شهر . افرض انك بدأت بمراقبة فيل عندما كان طول نابه 100cm اكتب على صورة الميل – النقطة معادلة تمثل نمو ناب الفيل بعد n شهرا من المراقبة .

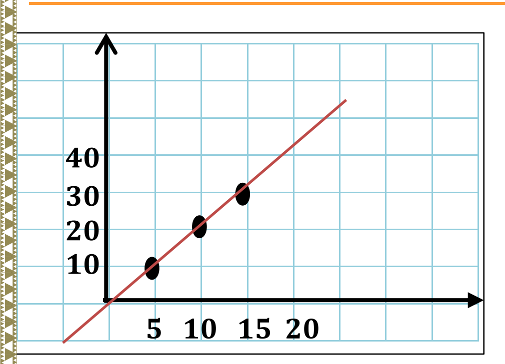
الحل :

$m = n \;, \overset{(x_1, y_1)}{(1, 100)}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ بالتعويض معادلة الميل – النقطة

$y - 100 = n(x - 1)$

26 فيزياء : التمثيل البياني المجاور يمثل كمية المياه المتسربة ن خزان خلال فترة زمنية معينة . اكتب على صورة نقطتين معادلة تمثل تسرب المياه بعد n ثانية .



الحل :

من الجدول المجاور نأخذ أي نقطتين ولتكن : $\overset{(x_1, y_1)}{(5, 10)} , \overset{(x_2, y_2)}{(15, 30)}$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 10}{x - 5} = \frac{30 - 10}{15 - 5} \Rightarrow \frac{y - 10}{x - 5} = \frac{20}{10} \Rightarrow \frac{y - 10}{x - 5} = 2$$ الطرفين في الوسطين

$y - 10 = 2x - 10 \Rightarrow y - 2x = -10 + 10$

$y - 2x = 0$ معادلة تمثل تسرب المياه

27 نقود : يريد شخص تسديد مبلغ قدره 30 مليون دينار بدفعات شهرية متساوية مقدارها 105 مليون دينار . المعادلة الخطية التالية $y = -1.5x + 30$ حيث y القيمة الباقية من المبلغ , x عدد الاشهر , استعمل معادلة الميل – المقطع لتحديد ميله ومقطعه .

الحل :

$y = -1.5x + 30$

$y = mx + k$

بالمقارنة مع معادلة الميل - المقطع

$m = -1.5 \,, k = 30$

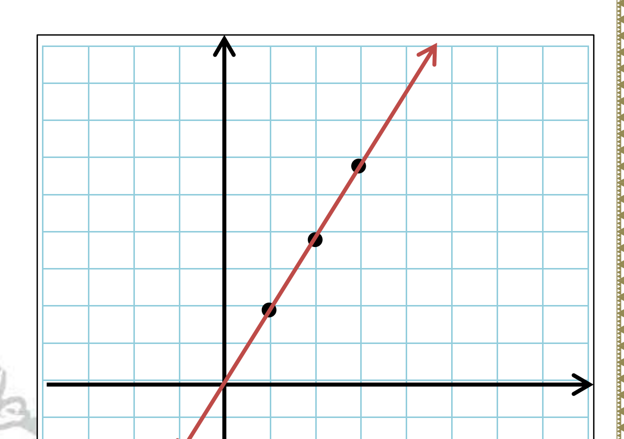
اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998

28 صحة : في دراسة حديثة توصلت الى أن الشخص يفقد 2 ساعة من عمره عند استهلاكه علبة سكائر واحدة . اكتب المعادلة التي تمثل ذلك ومثلها بيانيا .

الحل :

الزمن (ساعة)	2	4	6
الاستهلاك	1	2	3

نأخذ أي نقطتين من الجدول ولتكن $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$: $(1, 2), (2, 4)$



$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-2}{x-1} = \frac{4-2}{2-1} \Rightarrow \frac{y-2}{x-1} = \frac{2}{1}$$ الطرفين في الوسطين

$$y - 2 = 2x - 2 \Rightarrow y = 2x - 2 + 2$$

$y = 2x$ معادلة المستقيم

29 هندسة : استعمل المعلومات في الشكل المجاور جد معادلة المستقيم في الحالات التالية :

i) نقطتان ii) ميل – نقطة iii) ميل – مقطعه الصادي

الحل :

النقطتان هما : $(3, 0), (0, 2)$ حيث $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

i) $$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow \frac{y-0}{x-3} = \frac{2-0}{0-3} \Rightarrow \frac{y}{x-3} = \frac{-2}{3}$$ الطرفين في الوسطين

$3y = -2x + 6 \Rightarrow 3y + 2x = 6$ معادلة المستقيم

ii) $$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2-0}{3-0} = \frac{-2}{3} \quad , \quad (3, 0) \; (x_1, y_1)$$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ بالتعويض الميل – النقطة

$y - 0 = \frac{-2}{3}(x - 3) \Rightarrow 3y = -2x + 6 \Rightarrow 3y + 2x = 6$ معادلة المستقيم

iii) $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2-0}{3-0} = \frac{-2}{3}$, $\underset{(x_1,y_1)}{(3,0)}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ بالتعويض الميل – النقطة

$y - 0 = \frac{-2}{3}(x - 3) \Rightarrow 3y = -2x + 6 \} \div 3 \Rightarrow y = \frac{-2}{3} + 2$ معادلة المستقيم

فكر

30 تفكير ناقد : هل يوجد مستقيم ميله 4 ويمر في النقطتين $(8,-2)$, $(5,7)$ ؟ ان وجدت مستقيما كهذا فاكتب معادلته والا فعلل جوابك .

(x_1,y_1) ,(x_2,y_2)

الحل :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-7}{8-5} = \frac{-9}{3} = -3$$

لا يوجد مستقيم ميله 4 يمر بالنقطتين .

---

31 تحد : مستقيم تقاطعه الأفقي النظير الجمعي لتقاطعه العمودي ويمر في النقطة $(2,3)$ اكتب معادلة الميل – النقطة هذا المستقيم .

الحل :

(x_1,y_1) ,(x_2,y_2)
$(2,3), (0,0)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-3}{0-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ بالتعويض الميل – النقطة

$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 3) \Rightarrow 2y - 4 = 3x - 9 \Rightarrow 2y - 3x = -9 + 4$

$2y - 3x = -5$ معادلة المستقيم

---

32 ايهما صحيح : معادلة مستقيم ميله $\frac{3}{5}$ ويمر بالنقطة $(-1,7)$.

كتب احمد المعادلة بشكل $y - 7 = \frac{5}{3}(x+1)$ وكتب محمد المعادلة $y - 7 = \frac{3}{5}(x+1)$ أيهما اجابته صحيحة ؟

الحل :



$m = \frac{3}{5}$, $(-1, 7)$
(x_1, y_1) ,

$y - y_1 = m(x - x_1)$ بالتعويض الميل – النقطة

$$y - 7 = \frac{3}{5}(x - (-1)) \Rightarrow y - 7 = \frac{3}{5}(x + 1)$$

محمد اجابته صحيحة .

اكتب مسألة من واقع الحياة يمكن تمثيلها بمعادلة الخط المستقيم .

الحل : اشترى محمد أجهزة كهربائية بالتقسيط حيث دفع 750 الف دينار دفعة أولى ويدفع 100 الف دينار كل شهر . اكتب معادلة المبلغ الكلي الذي سيدفعه بعد x شهرا , استعمل معادلة الميل – والمقطع لتحديد ميله ومقطعه .

$y = 100x + 750$ معادلة المبلغ الكلي

$y = mx + k$

$m = 100$, $k = 750$

المستقيمات المتوازية والمتعامدة

المستقيمات المتوازية

يكون أي مستقيمين متوازيين عندما يتساوى ميلهما بشرط انهما غير عموديين :

الصيغة الرياضية : $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$

ملاحظة : يمكن تطبيق الميل على المستقيمات المتوازية في اثبات :

1) النقاط ABCD هي رؤوس متوازي الأضلاع .

2) النقاط ABC تقع على استقامة واحدة .

مثال بين ان النقط $A(-2,3)$, $B(-1,4)$, $C(2,-1)$, $D(1,-2)$ رؤوس متوازي الاضلاع ABCD باستعمال الميول .

الحل :

نجد الميل بين النقطتين $D(1,-2), C(2,-1)$ $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m\overleftrightarrow{BC} = \frac{-1-(-2)}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$$

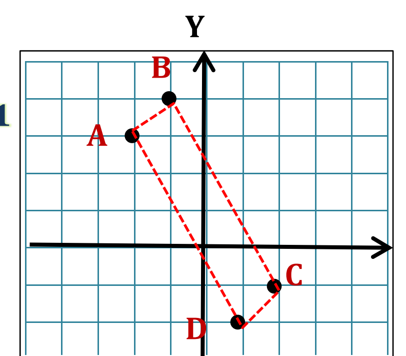
نجد الميل بين النقطتين $A(-2,3), B(-1,4)$ $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{4-3}{-1-(-2)} = \frac{1}{-1+2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\therefore m\overleftrightarrow{AB} = m\overleftrightarrow{DC} = 1 \implies \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$$

الشكل ABCD متوازي اضلاع



مثال اثبت أن النقط : $A(-2,-1), B(-1,0), C(2,3)$ تقع على استقامة واحدة .

الحل :

(x_1,y_1) ,(x_2,y_2)
$B(-1,0), C(2,3)$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m\overleftrightarrow{BC} = \frac{3-0}{2-(-1)}$$

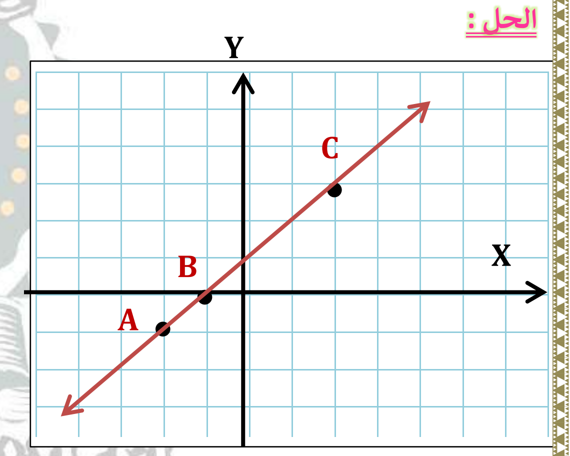
$$m\overleftrightarrow{BC} = \frac{3}{3} = 1$$

(x_1,y_1) ,(x_2,y_2)
$A(-2,-1), B(-1,0)$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{0-(-1)}{-1-(-2)}$$

$$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{-1}{1} = -1$$



$\because m\overleftrightarrow{AB} = m\overleftrightarrow{BC} \Longleftarrow$ ∴ النقط ABC تقع على استقامة واحدة .

مثال جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $C(5,3)$ والموازي للمستقيم المار بالنقطتين $A(4,5), B(2,-3)$
(x_1,y_1) ,(x_2,y_2)

الحل :

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-3-5}{2-4} = \frac{-8}{-2} = 4 \implies \therefore m = 4 \ . C(5,3)$$

(x_1,y_1) ,

$y - y_1 = m(x - x_1)$ بالتعويض الميل – النقطة

$$y - 3 = 4(x-5) \implies y - 3 = 4x - 20 \implies y = 4x - 20 + 3$$

$y = 4x - 17$ معادلة المستقيم

مثال : ليكن $\overleftrightarrow{L_3} : y = \frac{-5}{3}x - 4 , \overleftrightarrow{L_2} : y = \frac{5}{3}x + 4 , \overleftrightarrow{L_1} : y = \frac{-5}{3}x + 4$ أي المستقيمات متوازية . ولماذا ؟

الحل :

$\overleftrightarrow{L_1} : y = \frac{-5}{3}x + 4$

$y = mx + k$

$m_1 = \frac{-5}{3} , k = 4$

$\overleftrightarrow{L_2} : y = \frac{5}{3}x + 4$

$y = mx + k$

$m_2 = \frac{5}{3} , k = 4$

$\overleftrightarrow{L_3} : y = \frac{-5}{3}x - 4$

$y = mx + k$

$m_3 = \frac{-5}{3} , k = -4$

$\therefore m_1 = m_2 \implies \overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} , k_1 \neq k_2$

المستقيمات المتعامدة

يكون المستقيمين متعامدان عندما يكون ميل احدهما مقلوب ميل الآخر بعكس الإشارة . الصيغة الرياضية :

$$\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2} \iff m_1 = \frac{-1}{m_2}$$

أو يكون المستقيمين متعامدان اذا كان حاصل ضرب ميلهما $= -1$ الصيغة الرياضية :

$$\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2} \iff m_1 \times m_2 = -1$$

ملاحظة :يكون تطبيق الميل في المستقيمات في اثبات ان المثلث ABC قائم الزاوية .



مثال : بين أن النقط : $A(2,4), B(-4,2), C(-2,-4)$ رؤوس لمثلث قائم الزاوية . حدد الزاوية القائمة فيه

الحل : المثلث ABC قائم الزاوية في B $\Leftarrow \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$(x_1, y_1) , (x_2, y_2)$
$A(2,4), B(-4,2)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{2-4}{-4-2}$

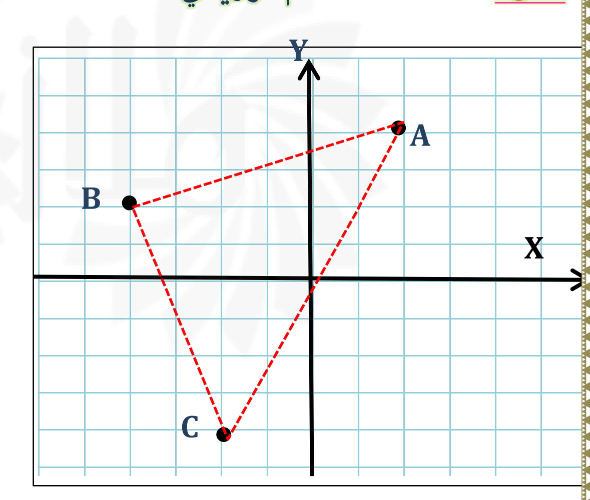
$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$

$(x_1, y_1) , (x_2, y_2)$
$B(-4,2), C(-2,-4)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overleftrightarrow{BC} = \frac{-4-2}{-2-(-4)}$

$m\overleftrightarrow{BC} = \frac{-6}{2} = -3$



$m\overleftrightarrow{AB} \times m\overleftrightarrow{BC} = \frac{1}{3} \times (-3) = -1 \implies \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

مثال جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $C(3,-4)$ العمودي على المستقيم المار $A(0,3), B(2,-2)$
$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$

الحل :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m\overleftrightarrow{L_1} = \frac{-2-3}{2-0} = \frac{-5}{2}$$

∵ المستقيمان متعامدان ⇐ $m\overleftrightarrow{L_2} = \frac{2}{5}$ (مقلوب ميل $\overleftrightarrow{L_1}$ بعكس الاشارة)

$$m = \frac{2}{5}\ , C\overset{(x_1,y_1)}{(3,-4)}$$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ بالتعويض الميل – النقطة

$$y - (-4) = \frac{2}{5}(x-3) \quad \Rightarrow \quad y + 4 = \frac{2}{5}(x-3)$$

$$5y + 20 = 2x - 6 \quad \Rightarrow \quad 5y = 2x - 6 - 20$$

$$5y = 2x - 26 \quad \} \div 5$$

$y = \frac{2}{5}x - \frac{26}{5}$ معادلة المستقيم

مثال جد قيمة a التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(3,1), (a,-4)$ يساوي 5

الحل :

$m = 5\ ,\quad \overset{(x_1,y_1)}{(a,-4)}, \overset{(x_2,y_2)}{(3,1)}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$5 = \frac{1-(-4)}{3-a} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{1} = \frac{5}{3-a}$ الطرفين في الوسطين

$$15 - 5a = 5 \quad \Rightarrow \quad 5a = 15 - 5 \quad \Rightarrow \quad 5a = 10 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{10}{5} = 2$$

تأكد من فهمك

1 المستقيم AB يمر بالنقطتين $A(-2,4), B(a,6)$ يوازي المستقيم CD يمر بالنقطتين $C(6,-6), D(2,-7)$ جد قيمة a .

الحل :

$(x_1, y_1)\ ,(x_2, y_2)\qquad (x_1, y_1)\ ,(x_2, y_2)$

$A(-2,4), B(a,6)\quad C(6,-6), D(2,-7)$

$m\overleftrightarrow{AB} = m\overleftrightarrow{CD}$ المستقيمان متوازيان $\Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\frac{6-4}{a-(-2)} = \frac{-7-(-6)}{2-6} \Rightarrow \frac{2}{a+2} = \frac{-1}{-4} \Rightarrow \frac{2}{a+2} = \frac{1}{4}$ الطرفين في الوسطين

$a + 2 = 8 \Rightarrow a = 8 - 2 = 6$

2 جد قيمة a التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(a,2), (6,1)$ يساوي $\frac{-1}{4}$

الحل :

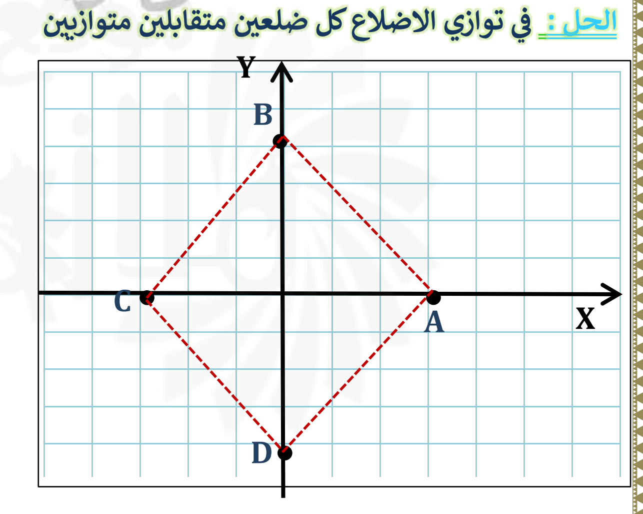
$m = \frac{-1}{4}\ ,(a,2)\ ,(6,1)$ حيث $(x_1, y_1)\ ,(x_2, y_2)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{-1}{4} = \frac{1-2}{6-a} \Rightarrow \frac{-1}{4} = \frac{-1}{6-a}$ الطرفين في الوسطين

$-6 + a = -4 \Rightarrow a = -4 + 6 = 2$

3 برهن أن الشكل ABCD متوازي اضلاع حيث : $A(3,0), B(0,4), C(-3,0), D(0,-4)$

الحل : في توازي الاضلاع كل ضلعين متقابلين متوازيين



$(x_1, y_1)\ ,(x_2, y_2)$

$A(3,0), B(0,4)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{4-0}{0-3} = \frac{4}{-3}$

$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{-4}{3}$

$(x_1, y_1)\ ,(x_2, y_2)$

$C(-3,0), D(0,-4)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overleftrightarrow{CD} = \frac{-4-0}{0-(-3)}$

$m\overleftrightarrow{CD} = \frac{-4}{3}$

$\because m\overleftrightarrow{AB} = m\overleftrightarrow{CD} \Leftarrow \therefore$ الشكل ABCD متوازي اضلاع .

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998

4 برهن أن $\triangle ABC$ حيث : $A(-5,-7), B(-8,-2), C(-4,-3)$ قائم الزاوية . حدد الزاوية القائمة .

الحل :

$\overset{(x_1,y_1)}{A(-5,-7)}, \overset{(x_2,y_2)}{B(-8,-2)}$

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overleftrightarrow{AB} = \dfrac{-2-(-7)}{-8-(-5)} = \dfrac{-2+7}{-8+5}$

$m\overleftrightarrow{AB} = \dfrac{5}{-3}$

$\overset{(x_1,y_1)}{B(-8,-2)}, \overset{(x_2,y_2)}{C(-4,-3)}$

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overleftrightarrow{BC} = \dfrac{-3-(-2)}{-4-(-8)}$

$m\overleftrightarrow{BC} = \dfrac{-1}{4}$

$\overset{(x_1,y_1)}{A(-5,-7)}, \overset{(x_2,y_2)}{C(-4,-3)}$

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overleftrightarrow{BC} = \dfrac{-3-(-7)}{-4-(-5)}$

$m\overleftrightarrow{BC} = \dfrac{4}{1}$

$\because m\overleftrightarrow{BC} \times m\overleftrightarrow{BC} = \frac{-1}{4} \times \frac{4}{1} = -1 \quad \Rightarrow \quad \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BC}$



5 أثبت أن النقط : $A(0,-1), B(4,2), C(8,5)$ تقع على استقامة واحدة .

الحل :

$\overset{(x_1,y_1),(x_2,y_2)}{A(0,-1), B(4,2)}$

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m\overleftrightarrow{AB} = \dfrac{2-(-1)}{4-0} = \dfrac{3}{4}$

$\overset{(x_1,y_1),(x_2,y_2)}{B(4,2), C(8,5)}$

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m\overleftrightarrow{BC} = \dfrac{5-2}{8-4} = \dfrac{3}{4}$

$\because m\overleftrightarrow{AB} = m\overleftrightarrow{BC} = \frac{3}{4} \Leftarrow$ $\therefore$ النقاط ABC تقع على استقامة واحدة .

---

6 جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-4,0)$ العمودي على المستقيم المار بالنقطتين $\overset{(x_1,y_1)}{(3,-2)}, \overset{(x_2,y_2)}{(6,0)}$

الحل :

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overleftrightarrow{L_1} = \dfrac{0-(-2)}{6-3} = \dfrac{2}{3}$

$\because$ المستقيمان متعامدان $\Leftarrow m\overleftrightarrow{L_2} = \frac{-3}{2}$ (مقلوب ميل $\overleftrightarrow{L_1}$ بعكس الاشارة)

$m = \dfrac{-3}{2}, \overset{x_1,y_1)}{(-4,0)}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ بالتعويض الميل – النقطة

$y - 0 = \frac{-3}{2}(x-(-4)) \Rightarrow y = \frac{-3}{2}(x+4)$

$2y = -3x - 12 \;\} \div 2 \Rightarrow y = \dfrac{-3}{2}x - 6$ معادلة المستقيم

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998

تدرب وحل التمرينات

7 المستقيم AB حيث $A(0,2), B(3,0)$ المستقيم CD حيث $C(6,-2), D(9,-4)$ والمستقيم EF حيث $E(0,-5), F(2,-2)$ ما علاقة $\overleftrightarrow{AB}$ بالمستقيمين EF, CD ؟ بين ذلك .

الحل :

$(x_1, y_1)\ ,(x_2, y_2)$
$A(0,2), B(3,0)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{0-2}{3-0} = \frac{-2}{3}$$

$(x_1, y_1)\ ,(x_2, y_2)$
$C(6,-2), D(9,-4)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m\overleftrightarrow{CD} = \frac{-4-(-2)}{9-6} = \frac{-2}{3}$$

$(x_1, y_1)\ ,(x_2, y_2)$
$E(0,-5), F(2,-2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m\overleftrightarrow{EF} = \frac{-2-(-5)}{2-0} = \frac{3}{2}$$

$\therefore m\overleftrightarrow{AB} = m\overleftrightarrow{CD} = \frac{-2}{3} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$　　المستقيمان متوازيان

$\therefore m\overleftrightarrow{AB} \times m\overleftrightarrow{EF} = \frac{-2}{3} \times \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{EF}$　　المستقيمان متعامدان

---

8 هل النقط : $A(0,-7), B(1,-1), C(2,3)$ تقع على مستقيم واحد ؟ بين ذلك .

الحل :

$(x_1, y_1)\ ,(x_2, y_2)$
$A(0,-7), B(1,-1)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{-1-(-7)}{1-0} = \frac{-1+7}{1} = 6$$

$(x_1, y_1)\ ,(x_2, y_2)$
$B(1,-1), C(2,3)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m\overleftrightarrow{BC} = \frac{3-(-1)}{2-1} = \frac{3+1}{1} = 4$$

$\because m\overleftrightarrow{AB} \neq m\overleftrightarrow{BC} \Leftarrow$ $\therefore$ النقط ABC لا تقع على مستقيم واحد .

---

9 برهن أن الشكل ABCD مستطيل حيث : $A(1,4), B(2,6), C(8,3), D(7,1)$

الحل :

$(x_1, y_1)\ ,(x_2, y_2)$
$A(1,4), B(2,6)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{6-4}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

$(x_1, y_1)\ ,(x_2, y_2)$
$C(8,3), D(7,1)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m\overleftrightarrow{CD} = \frac{-1-3}{7-8} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$\because m\overleftrightarrow{AB} = m\overleftrightarrow{CD} \Leftarrow$ $\therefore$ الشكل ABCD مستطيل



اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين

07703153998

10 برهن ان المثلث ABC حيث : $A(4,0), B(-2,2), C(-4,4)$ قائم الزاوية ثم حدد الزاوية القائمة .

الحل :

$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$
$A(4,0), C(-4,4)$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m\overleftrightarrow{AC} = \frac{4-0}{-4-4}$$

$$m\overleftrightarrow{AC} = \frac{4}{-8} = \frac{-1}{2}$$

$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$
$B(-2,2), C(-4,4)$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m\overleftrightarrow{BC} = \frac{4-2}{-4-(-2)}$$

$$m\overleftrightarrow{BC} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$
$A(4,0), B(-2,2)$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{2-0}{-2-4}$$

$$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

$$m\overleftrightarrow{BC} \times m\overleftrightarrow{AC} = 2 \times \left(\frac{-1}{2}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AC}$$

---

11 جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(1,-1)$ والموازي للمستقيم المار بالنقطتين $(3,-2),(6,0)$
$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$

الحل :

$$y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{0-(-2)}{6-3} = \frac{2}{3} \quad , \quad m = \frac{2}{3}\ ,(1,-1)\ (x_1,y_1)$$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ بالتعويض الميل – النقطة

$$y-(-1) = \frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow y+1 = \frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow 3y+3 = 2x-2$$

$$3y = 2x-2-3 \Rightarrow 3y = 2x-5 \ \}\div 3$$

$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ معادلة المستقيم

تدرب وحل مسائل حياتية

12 فيزياء : يمثل الجدول المجاور كمية المياه المتدفقة من احد السدود خلال فترة معينة من الزمن . هل بيانات الجدول تمثل خط مستقيم ؟ بين ذلك .

المياه المتدفقة	
حجم الماء m^3	الزمن (ثوان)
75000	5
15000	10
225000	15

الحل :

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

(x_1, y_1) (x_2, y_2)
$(5, 75000), (10, 15000)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m_1 = \frac{15000 - 75000}{10 - 5}$

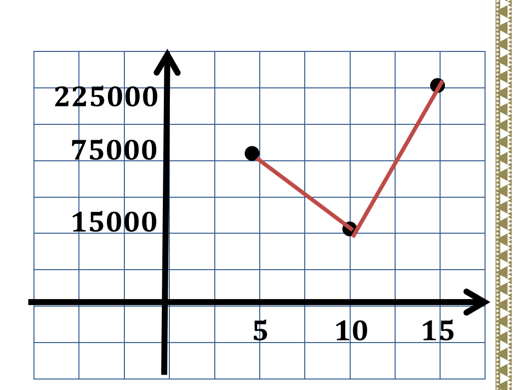
$m_1 = \frac{-60000}{5} = -12000$

(x_1, y_1) (x_2, y_2)
$(10, 15000), (15, 225000)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m_2 = \frac{225000 - 15000}{15 - 10}$

$m_2 = \frac{210000}{5} = 42000$



$m_1 \neq m_2 \Leftarrow$ ∴ بيانات الجدول لا تمثل خط مستقيم

---

13 هندسة : برهن أن الشكل ABCD شبه منحرف حيث أن احداثيات القاعدة العليا $(6, 2), (4, 5)$ والقاعدة السفلى $(-2, 5), (2, -1)$. هل هو قائم الزاوية ؟ بين ذلك .

الحل :

القاعدة السفلى
$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$
$(-2, 5), (2, -1)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m_2 = \frac{-1 - 5}{2 - (-2)} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$

القاعدة العليا
$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$
$(4, 5), (6, 2)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m_1 = \frac{2 - 5}{6 - 4} = \frac{-3}{2}$

$\therefore m_1 = m_2 \Rightarrow$ ∴ الشكل ABCD شبه منحرف

$\therefore m_1 \times m_2 = \frac{-3}{2} \times \left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{9}{4} \neq -1 \Rightarrow$ شبه المنحرف ليس قائم الزاوية

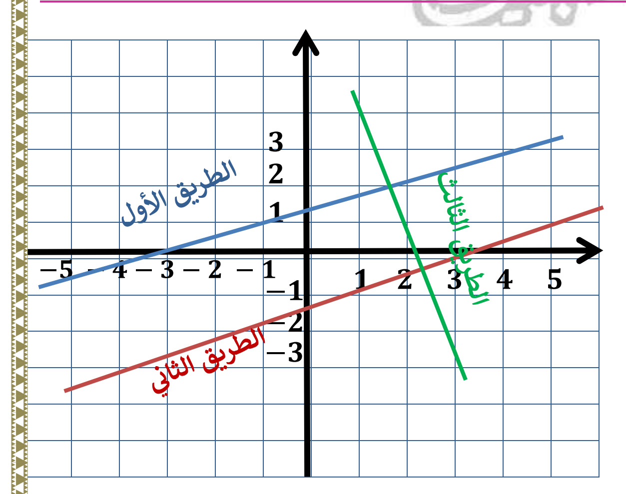
---

14 خريطة : استعمل الخريطة المجاورة لتبين أن :

i) الطريق الأول يوازي الطريق الثاني .

ii) الطريق الثاني عمودي على الطريق الثالث .

iii) هل الطريق الأول عمودي على الطريق الثالث ؟ بين ذلك .



الحل :

i) الطريق الأول يقابل الطريق الثاني هذا يعني ان الطريقان متوازيان .

((كل ضلعين متقابلين متوازيين)) أي أن : $m_1 = m_2$

ii) الطريق الثاني يقاطع الطريق الثالث هذا يعني الطريقان متعامدان . أي أن : $m_2 \times m_3 = -1$

iii) الطريق الأول يقاطع الطريق الثالث هذا يعني الطريقان متعامدان . أي أن : $m_2 \times m_3 = -1$

فكر

15 تحد : هل النقاط الآتية : $(2,3), (4,5), (-1,0), (-2,-1)$ تقع على استقامة واحدة ؟ بين ذلك .

الحل :

$(x_1, y_1)\ ,(x_2, y_2)$

$(-1,0), (4,5)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_2 = \frac{5-0}{4-(-1)} = \frac{5}{5} = 1$$

$(x_1, y_1)\ ,(x_2, y_2)$

$(-2,-1), (-1,0)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_1 = \frac{0-(-1)}{-1-(-2)} = \frac{1}{1} = 1$$

$\because\ m_1 = m_2 \implies$ $\therefore$ النقاط تقع على استقامة واحدة

---

16 اصحح الخطأ : قال احمد ان المستقيم المار بالنقطتين $(0,4), (-3,0)$ عمودي على المستقيم المار بالنقطتين $(0,0), \left(1,\frac{3}{4}\right)$. اكتشف خطأ احمد وصححه .

الحل :

$(x_1, y_1)\ ,(x_2, y_2)$

$\left(1,\frac{3}{4}\right), (0,0)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_2 = \frac{0-\frac{3}{4}}{0-1} = \frac{-\frac{3}{4}}{-1} = \frac{3}{4}$$

$(x_1, y_1)\ ,(x_2, y_2)$

$(-3,0), (0,4)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_1 = \frac{4-0}{0-(-3)} = \frac{4}{3}$$

$\therefore\ m_1 \times m_2 = \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = 1 \neq -1 \implies$ المستقيمان ليس عموديان

---

17 مسألة مفتوحة : المعادلتين الآتيتين : $3y - 5x = 15\ ,\ 3y - 5x = 20$ تمثلان مستقيمان متوازيين . ما التشابه والاختلاف بينهما ؟ وضح ذلك .

الحل :

$3y - 5x = 1 \implies 3y = 5x + 15 \} \div 3$

$y = \frac{5}{3}x + 5$

$y = mx + k \implies m_2 = \frac{3}{5}, k = 5$

$3y - 5x = 20 \implies 3y = 5x + 20 \} \div 3$

$y = \frac{5}{3}x + \frac{20}{3}$

$y = mx + k \implies m_1 = \frac{5}{3}, k = \frac{20}{3}$

$m_1 = m_2\ ,\ k_1 \neq k_2$

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

18 تبرير : لماذا النقاط التالية تقع على مستقيم يوازي محور السينات : $(-1,4),(0,4),(2,4)$ ؟

الحل :

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$
$(0,4),(2,4)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m_2=\frac{4-4}{2-0}=\frac{0}{2}=0$$

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$
$(-1,4),(0,4)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m_1=\frac{4-4}{0-(-1)}=\frac{0}{1}=0$$

$\because m_1=m_2 \Rightarrow$ النقاط تقع على استقامة واحدة $\therefore$

19 أيهما صح : قالت سارة ان ميل المستقيم $5y+2x=10$ هو $\frac{2}{5}$ ومقطعه هو 2 وقال مهند ان ميل $\frac{-2}{5}$ ومقطعه 2 بين ايهما صحيح اجابته ؟

الحل :

$5y+2x=10 \Rightarrow 5y=-2x+10\ \}\div 5$

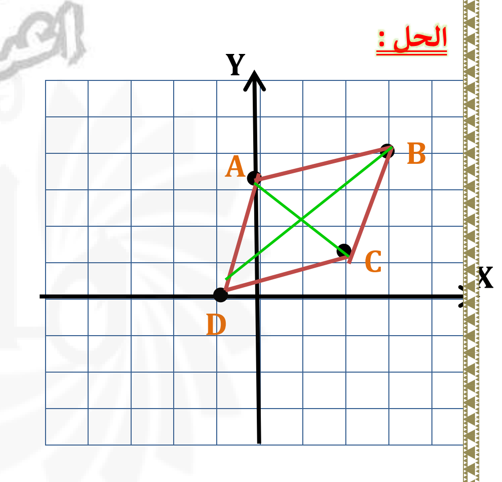
$y=\frac{-2}{5}x+2$

$y=mx+k$

$m=\frac{-2}{5},\ k=2 \Rightarrow$ اجابة مهند صحيحة

20 مسألة مفتوحة : ABCD معين رؤوسه $A(0,3),B(3,4),C(2,1),D(-1,0)$ برهن أن قطراه متعامدان

الحل :



$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$
$A(0,3),C(2,1)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m\overleftrightarrow{AC}=\frac{1-3}{2-0}=\frac{-2}{2}=-1$$

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$
$B(3,4),D(-1,0)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m\overleftrightarrow{BD}=\frac{0-4}{-1-3}=\frac{-4}{-4}=1$$

$m\overleftrightarrow{AC}\times m\overleftrightarrow{BD}=-1\times 1=-1 \Rightarrow$ قطرا المعين متعامدان $\therefore$

21 مسألة مفتوحة : بماذا يختلف ويتشابه المستقيمان المتوازيان ؟

الحل : يتشابه المستقيمان المتوازيان في ميلهما أي أن : $m_1=m_2$ ويختلفان في : $k_1\neq k_2$

22 مسألة مفتوحة : بماذا يختلف ويتشابه المستقيمان المتعامدان ؟

الحل : يتشابه : ميل احدهما يساوي مقلوب ميل الآخر بعكس الاشارة أي : $m_1 \times m_2 = -1$ ويختلفان $k_1 \neq k_2$

اكتب كيف توضح ان المستقيمان متوازيان أم متعامدان ؟ باستعمال ميلهما .

الحل :

يكون المستقيمان متوازيان اذا تساوى ميلهما . أي أن : $m_1 = m_2$

يكون المستقيمان متعامدان اذا كان ميل احدهما يساوي مقلوب ميل الآخر بعكس الاشارة . أي أن :

$$m_1 \times m_2 = -1 \quad \text{أو} \quad m_1 = \frac{1}{m_2}$$

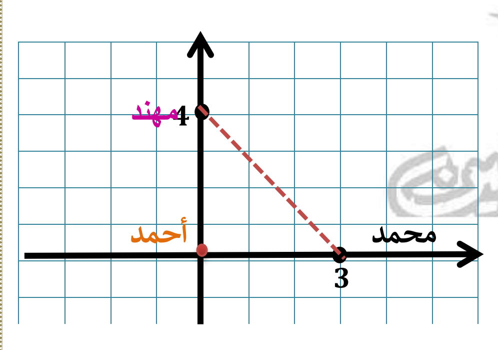
المسافة بين نقطتين

قانون المسافة بين نقطتين

اذا كانت $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ فأن المسافة بين AB هو :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال ثلاثة اصدقاء خرجوا في رحلة استكشافية محددة مواقعهم كما في الشكل المجاور . محمد يبعد عن أحمد 3km ومهند يبعد عن أحمد 4km كيف تجد المسافة بين محمد ومهند .



الحل :

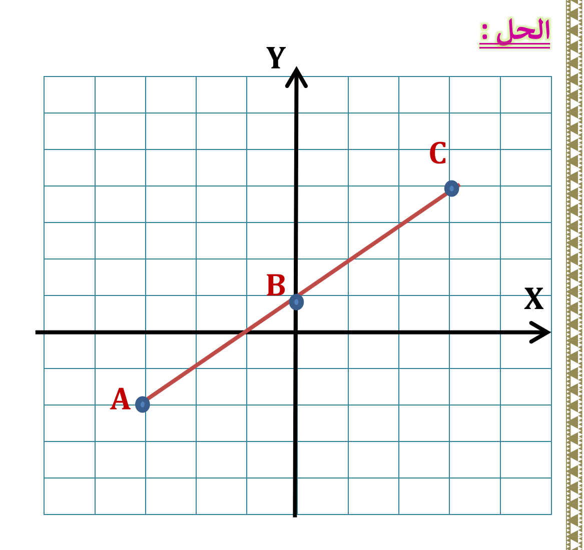
موقع محمد $A(3, 0)$ (x_1, y_1) وموق مهند $B(0, 4)$ (x_2, y_2)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(3-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

مثال باستعمال قانون المسافة : أثبت أن النقط $A(-3,-2), B(0,1), C(3,4)$ تقع على استقامة واحدة

الحل :



$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$
$A(-3,-2), B(0,1)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(0+3)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$
$B(0,1), C(3,4)$

$$BC = \sqrt{(4-1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$
$A(-3,-2), C(3,4)$

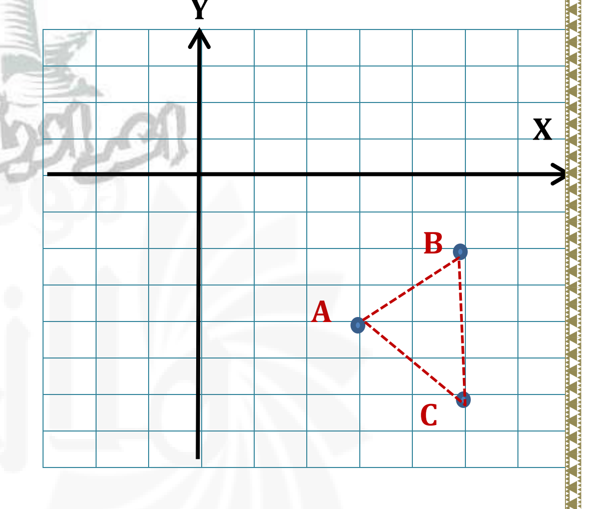
$$AC = \sqrt{(4+2)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$AC = AB + BC = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ الكل يساوي مجموع الأجزاء

$\therefore$ النقاط ABC تقع على استقامة واحدة .

مثال بين نوع المثلث الذي رؤوسه $A(3,-4), B(5,-2), C(5,-6)$ من حيث الاضلاع وهل المثلث قائم الزاوية ؟

الحل :



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$
$A(3,-4), B(5,-2)$

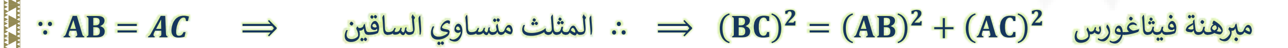
$$AB = \sqrt{(5-3)^2 + (-2+4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$
$B(5,-2), C(5,-6)$

$$BC = \sqrt{(5-5)^2 + (-6+2)^2} = \sqrt{0+16} = 4$$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$
$A(3,-4), C(5,-6)$

$$AC = \sqrt{(5-3)^2 + (-6+4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

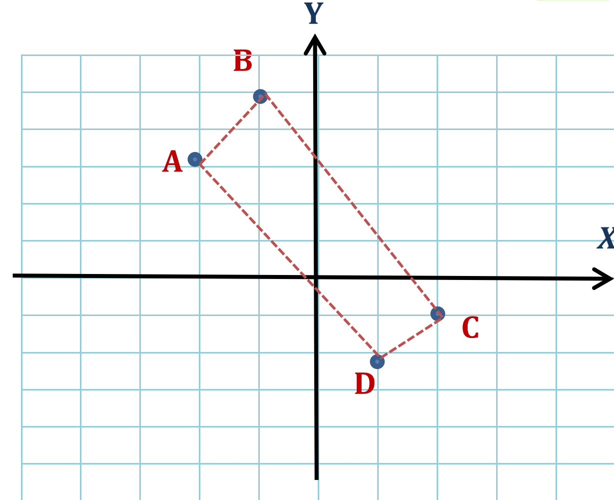


$\because AB = AC \Rightarrow$ $\therefore$ المثلث متساوي الساقين $\Rightarrow (BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$ مبرهنة فيثاغورس

$(4)^2 = (\sqrt{8})^2 + (\sqrt{8})^2 \Rightarrow 16 = 8 + 8 \Rightarrow 16 = 16 \Rightarrow$ المثلث قائم الزاوية

مثال بين باستعمال قانون المسافة أن النقاط : $A(-2,3), B(-1,4), C(2,-1), D(1,-2)$ رؤوس متوازي اضلاع ؟

الحل :



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$

$A(-2,3), B(-1,4)$

$$AB = \sqrt{(-1+2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$

$B(-1,4), C(2,-1)$

$$BC = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$

$C(2,-1), D(1,-2)$

$$CD = \sqrt{(1-2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$

$A(-2,3), D(1,-2)$

$$AD = \sqrt{(1+2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$\because AB = CD \quad , \quad \because BC = AD$

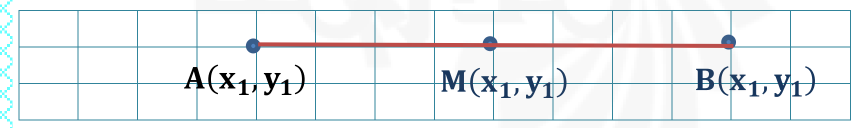
$\therefore$ الشكل ABCD متوازي اضلاع .

قانون نقطة المنتصف

نقطة المنتصف : هي النقطة الواقعة على بعدين متساويين عن طرفي قطعتي مستقيم وتنتمي له .

لتكن M منتصف النقطتين $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ فأن احداثيات نقطة المنتصف هي :

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



مثال جد احداثي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين $A(3,-8), B(3,6)$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$

الحل :

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$M = \left(\frac{3+3}{2}, \frac{-8+6}{2}\right) = \left(\frac{6}{2}, \frac{-2}{2}\right) = (3, -1)$$

مثال اذا كانت $M(1,-3)$ منتصف $\overline{AB}$ وكانت $A(-1,-2)$ فجد احداثي النقطة B .

الحل :

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$
$A(-1,-2), B(x, y)$

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$(1-3) = \left(\frac{-1+x}{2}, \frac{-2+y}{2}\right)$$

$1 = \frac{-1+x}{2}$ الطرفين في الوسطين $\Rightarrow -1 + x = 2 \Rightarrow x = 2 + 1 = 3 \Rightarrow x = 3$

$-3 = \frac{-2+y}{2}$ الطرفين في الوسطين $\Rightarrow -2 + y = -6 \Rightarrow y = -6 + 2 \Rightarrow y = -4$

$B(x, y) = B(3, -4)$

مثال $A(3,1), B(5,3), C(5,-1)$ رؤوس مثلث حيث $AB = AC$ النقطة M منتصف AB جد طول $\overline{AM}$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$

الحل : M منتصف $B(5,3), C(5,-1)$

$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{5+5}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = \left(\frac{10}{2}, \frac{2}{2}\right) = (5, 1)$$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$
$A(3,1), M(5,1)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AM = \sqrt{(5-3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{4+0} = 2$$



مثال بين باستعمال قانون المنتصف ان النقط : $A(-2,3), B(-1,4), C(2,-1), D(1,-2)$ رؤوس متوازي اضلاع .

الحل :

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$

$A(-2,3), C(2,-1)$ منتصف M_1

$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$M_1 = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{-1+3}{2}\right)$$

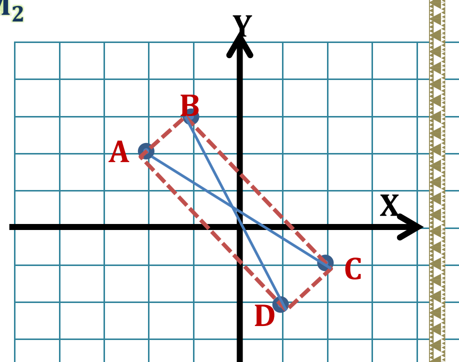
$$M_1 = \left(\frac{0}{2}, \frac{2}{2}\right) = (0,1)$$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$

$B(-1,4), D(1,-2)$ منتصف M_2

$$M_2 = \left(\frac{-1+1}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right)$$

$$M_2 = \left(\frac{0}{2}, \frac{2}{2}\right) = (0,1)$$



$\because M_1 = M_2 \Leftarrow$ $\therefore$ الشكل ABCD متوازي اضلاع .

تأكد من فهمك



أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي :

$(x_1, y_1) ,(x_2, y_2)$

i) $(0,0), (3,8)$

الحل :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(3-0)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{9+64} = \sqrt{73}$$

ii) $(-3,-1), (1,-4)$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$

الحل :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(1+3)^2 + (-4+1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

iii) $(-1,-2),(3,-4)$
$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$

الحل :

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$d=\sqrt{(3+1)^2+(-4+2)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

2 أوجد نقطة المنتصف للأفرع (i), (ii), (iii) في سؤال 1

$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$
i) $(0,0),(3,8)$

الحل :

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{0+3}{2},\frac{0+8}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{8}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},4\right)$$

ii) $(-3,-1),(1,-4)$
$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$

الحل :

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{-3+1}{2},\frac{-1-4}{2}\right)=\left(\frac{-2}{2},\frac{-5}{2}\right)=\left(-1,\frac{-5}{2}\right)$$

iii) $(1,-2),(3,-4)$
$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$

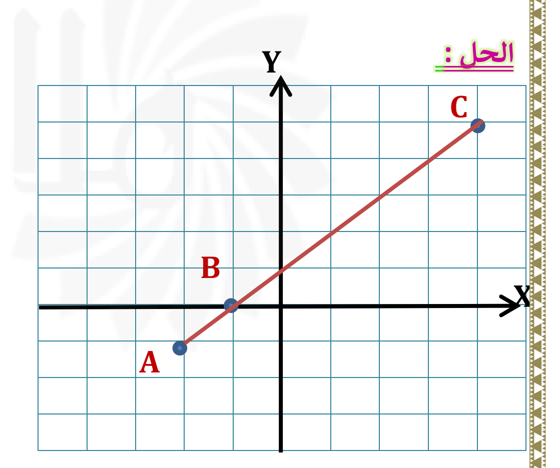
الحل :

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{1+3}{2},\frac{-2-4}{2}\right)=\left(\frac{4}{2},\frac{-6}{2}\right)=(2,-3)$$

3 باستعمال قانون المسافة بين نقطتين أثبت ان النقط : $A(-2,-1),B(-1,0),C(4,5)$ على استقامة واحدة .

الحل :

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$



$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$
$A(-2,-1),B(-1,0)$

$$AB=\sqrt{(-1+2)^2+(0+1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$
$B(-1,0),C(4,5)$

$$BC=\sqrt{(4+1)^2+(5-0)^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

$A(-2,-1),C(4,5)$
$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$

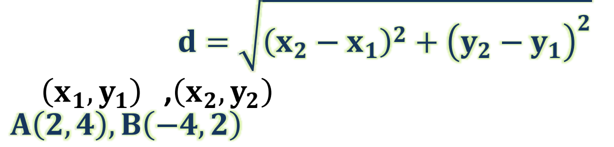
$$AC = \sqrt{(4+2)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$\therefore$ النقاط ABC تقع استقامة واحدة $\Longrightarrow$ $AC = AB + BC = \sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

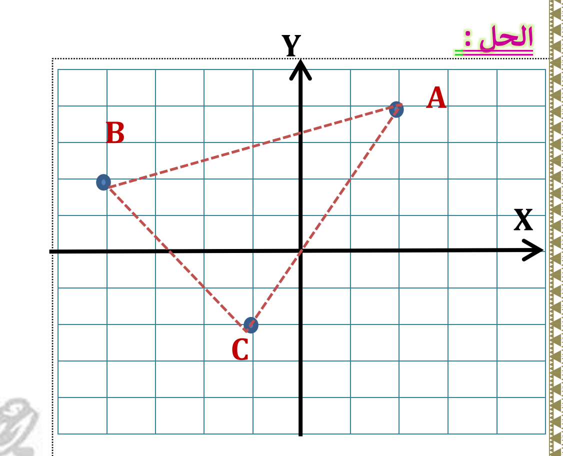


4 بين نوع المثلث الذي رؤوسه $A(2,4), B(-4,2), C(-1,-2)$ من حيث الاضلاع . وهل المثلث قائم الزاوية ؟

الحل :



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



(x_1, y_1) ,(x_2, y_2)
$A(2,4), B(-4,2)$

$$AB = \sqrt{(-4-2)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$B(-4,2), C(-1,-2)$

$$BC = \sqrt{(-1+4)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$A(2,4), C(-1,-2)$

$$AC = \sqrt{(-1-2)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$\therefore$ المثلث مختلف الاضلاع $\Longrightarrow$ $AB \neq BC \neq AC$

نظرية فيثاغورس $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$$\left(3\sqrt{5}\right)^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2 + (5)^2 \quad \Longrightarrow 45 = 40 + 25 \quad \Longrightarrow \quad 45 \neq 65$$

المثلث ABC ليس قائم الزاوية .



5 بين النقط التالية : $A(4,0), B(6,-6), C(-8,0), D(-10,6)$ رؤوس متوازي الاضلاع .

i) باستعمال قانون المسافة بين نقطتين . ii) باستعمال قانون نقطة المنتصف .

الحل : (i

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(x_1, y_1) ,(x_2, y_2)
$A(4,0), B(6,-6) \quad \Longrightarrow \quad AB = \sqrt{(6-4)^2 + (-6-0)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$

(x_1, y_1) ,(x_2, y_2)
$B(6,-6), C(-8,0) \quad \Longrightarrow \quad BC = \sqrt{(-8-6)^2 + (0+6)^2} = \sqrt{196+36} = \sqrt{232}$

(x_1, y_1) ,(x_2, y_2)
$C(-8,0), D(-10,6) \quad \Longrightarrow \quad CD = \sqrt{(-10+8)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$

$A(4,0), D(-10,6) \quad \Longrightarrow \quad AB = \sqrt{(-10-4)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{196+36} = \sqrt{232}$
(x_1, y_1) ,(x_2, y_2)



$\because AB = CD \;\;,\;\; BC = AD \;\; \Rightarrow$ $\therefore$ الشكل ABCD متوازي اضلاع

$ii)\;\; M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$\overset{(x_1,y_1)}{A(4,0)}, \overset{(x_2,y_2)}{C(-8,0)} \Rightarrow M_1 = \left(\frac{4-8}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = \left(\frac{-4}{2}, \frac{0}{2}\right) = (-2,0)$

$\overset{(x_1,y_1)}{B(6,-6)}, \overset{(x_2,y_2)}{D(-10,6)} \Rightarrow M_2 = \left(\frac{6-10}{2}, \frac{-6+6}{2}\right) = \left(\frac{-4}{2}, \frac{0}{2}\right) = (-2,0)$

$\therefore$ الشكل ABCD متوازي اضلاع

6 اذا كانت $M(-2,0)$ منتصف $\overline{AB}$ وكانت $A(4,0)$ فجد احداثي النقطة B .

الحل :

$\overset{(x_1,y_1)}{A(4,0)}, \overset{(x_2,y_2)}{B(x,y)}$

$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$(-2,0) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{0+y}{2}\right) \;\; \Rightarrow \;\; (-2,0) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{y}{2}\right)$

$-2 = \frac{4+x}{2} \;\; \Rightarrow \;\; 4+x = -4 \;\; \Rightarrow \;\; x = -4-4 \;\; \Rightarrow \;\; x = -8$

$0 = \frac{y}{2} \;\; \Rightarrow \;\; y = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \therefore B(x,y) = B(-8,0)$

تدرب وحل التمرينات

7 أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي :

$i)\;\; \overset{(x_1,y_1)}{(8,1)}, \overset{(x_2,y_2)}{(-4,3)}$

الحل :

$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-4-8)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{144+4} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$

$ii)\;\; \underset{(x_1,y_1)}{(6,-9)}, \underset{(x_2,y_2)}{(0,2)}$

الحل :

$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{(0-6)^2 + (2+9)^2} = \sqrt{36+121} = \sqrt{157}$

iii) $(-2,4),(-6,-2)$

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

الحل :

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$d=\sqrt{(-6+2)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$$

8 أوجد نقطة المنتصف للأفرع (i), (ii), (iii) في السؤال 7

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

i) $(8,1),(-4,3)$

الحل :

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{8-4}{2},\frac{1+3}{2}\right)=\left(\frac{4}{2},\frac{4}{2}\right)=(2,2)$$

ii) $(6,-9),(0,2)$

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

الحل :

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{6+0}{2},\frac{-9+2}{2}\right)=\left(\frac{6}{2},\frac{-7}{2}\right)=\left(3,\frac{-7}{2}\right)$$

iii) $(-2,4),(-6,-2)$

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

الحل :

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{-2-6}{2},\frac{4-2}{2}\right)=\left(\frac{-8}{2},\frac{2}{2}\right)=(-4,1)$$

9 باستعمال قانون المسافة بين نقطتين أثبت ان النقط : $A(1,-3),B(3,-4),C(-1,-2)$ تقع على استقامة واحدة .

الحل :

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

$A(1,-3),B(3,-4)$

$$AB=\sqrt{(3-1)^2+(-4+3)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

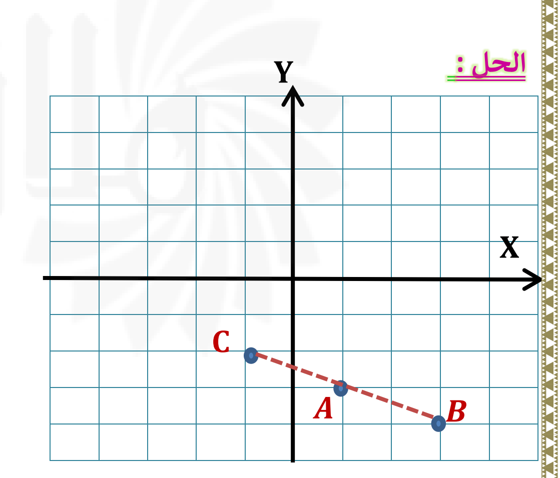
$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

$B(3,-4),C(-1,-2)$

$$BC=\sqrt{(-1-3)^2+(-2+4)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

$A(1,-3),C(-1,-2)$



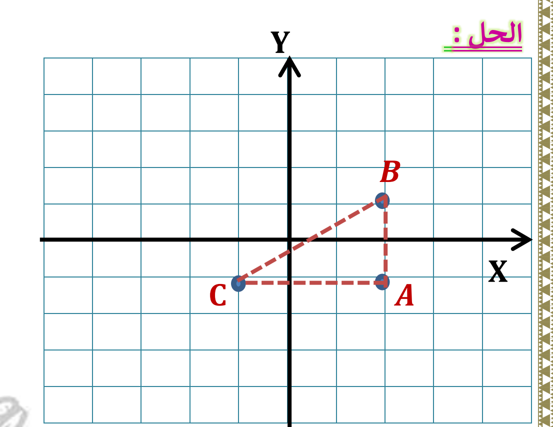
$AC = \sqrt{(-1-1)^2 + (-2+3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$BC = AB + AC = \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \quad \Rightarrow$ $\therefore$ النقط ABC تقع على استقامة واحدة



10 بين نوع المثلث الذي رؤوسه $A(2,-1), B(2,1), C(-1,-1)$ من حيث الاضلاع . وهل المثلث قائم الزاوية ؟

الحل :



$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$

$A(2,-1), B(2,1)$

$AB = \sqrt{(2-2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$

$B(2,1), C(-1,-1)$

$BC = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$

$A(2,-1), C(-1,-1)$

$AC = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1+1)^2} = \sqrt{9+0} = \sqrt{9} = 3$

$AB \neq BC \neq AC \quad \Rightarrow$ $\therefore$ المثلث ABC مختلف الاضلاع

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$ نظرية فيثاغورس

$\left(\sqrt{13}\right)^2 = (2)^2 + (3)^2 \quad \Rightarrow \quad 13 = 4 + 9$

$13 = 13 \quad \Rightarrow$ $\therefore$ المثلث قائم الزاوية



11 بين النقط التالية : $A(-3,5), B(2,7), C(1,9), D(-4,7)$ رؤوس متوازي الاضلاع .

i) باستعمال قانون المسافة بين نقطتين . ii) باستعمال قانون نقطة المنتصف .

الحل : (i

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$

$A(-3,5), B(2,7) \quad \Rightarrow \quad AB = \sqrt{(2+3)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

$(x_1, y_1) \ ,(x_2, y_2)$

$B(2,7), C(1,9) \ \Rightarrow \ BC = \sqrt{(1-2)^2 + (9-7)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$(x_1, y_1) \ ,(x_2, y_2)$

$C(1,9), D(-4,7) \ \Rightarrow \ CD = \sqrt{(-4-1)^2 + (7-9)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$

$A(-3,5), D(-4,7) \ \Rightarrow \ AB = \sqrt{(-4+3)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

$\because AB = CD \quad , \quad BC = AD \quad \Longrightarrow$ $\therefore$ الشكل ABCD متوازي اضلاع

$$ii) \quad M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$

$$A(-3,5), C(1,9) \quad \Longrightarrow \quad M_1 = \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{9+5}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{14}{2}\right) = (-1,7)$$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$

$$B(2,7), D(-4,7) \quad \Longrightarrow M_2 = \left(\frac{2-4}{2}, \frac{7+7}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{14}{2}\right) = (-1,7)$$

$\therefore$ الشكل ABCD متوازي اضلاع

12 اذا كانت $M(4,-2)$ منتصف $\overline{AB}$ وكانت $B(5,1)$ فجد احداثي النقطة A .

الحل :

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$

$$A(x, y), B(5,1)$$

$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$(4,-2) = \left(\frac{x+5}{2}, \frac{y+1}{2}\right)$$

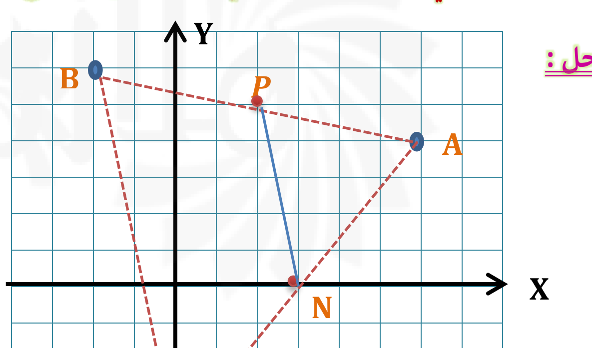
$$4 = \frac{x+5}{2} \quad \Longrightarrow \quad x+5 = 8 \quad \Longrightarrow \quad x = 8-5 \quad \Longrightarrow x = 3$$

$$-2 = \frac{y+1}{2} \quad \Longrightarrow \quad y+1 = -4 \quad \Longrightarrow \quad y = -4-1 \quad \Longrightarrow \quad y = -5 \quad \Longrightarrow \therefore A(x,y) = A(3,-5)$$

تدرب وحل المسائل الحياتية

1 هندسة : ABC مثلث رؤوسه $A(6,4), B(-2,6), C(0,-4)$ تحقق من ان طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين فيه يساوي نصف طول الضلع الثالث ؟

الحل :



$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$

$A(6,4), B(-2,6)$ نفرض p منتصف

$$p = \left(\frac{6-2}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = \left(\frac{4}{2}, \frac{10}{2}\right) = (2,5)$$

$(x_1, y_1) \quad ,(x_2, y_2)$

$A(6,4), C(0,-4)$ نفرض N منتصف

$N=\left(\frac{6+0}{2},\frac{4-4}{2}\right)=\left(\frac{6}{2},\frac{0}{2}\right)=(3,0)$

$(x_1,y_1)\quad,(x_2,y_2)$

$p(3,0),N(2,5)\quad\Rightarrow\quad d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_2)^2}$

$pN=\sqrt{(2-3)^2+(5-0)^2}=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$

$(x_1,y_1)\quad,(x_2,y_2)$

$B(-2,6),C(0,-4)$

$BC=\sqrt{(0+2)^2+(-4-6)^2}=\sqrt{(2)^2+(-10)^2}=\sqrt{4+100}=\sqrt{104}$

$BC=\sqrt{4\times 26}=2\sqrt{26}$

$\therefore$ pN نصف طول BC $\Leftarrow$ $pN=\frac{1}{2}BC$

---

13 تحديد موقع : موقع بيت محمود عند النقطة $(-4,0)$ وموقع مدرسته عند النقطة $(0,-3)$ ما المسافة التي يقطعها عند ذهابه الى المدرسة علما ان طول ضلع كل مربع في المستوي الإحداثي يمثل كيلومترا واحدا ؟

الحل :

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_2)^2}$

$(x_1,y_1)\quad,(x_2,y_2)$

$(-4,0),(0,-3)$

$d=\sqrt{(0+4)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

فكر

$(x_1,y_1)\quad,(x_2,y_2)$

14 تحد : دائرة طرفا احد اقطارها النقطتان $A(-1,1),B(5,1)$

i) احداثيات مركزها . ii) مساحتها

الحل :

i) $M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$M=\left(\frac{-1+5}{2},\frac{1+1}{2}\right)=\left(\frac{4}{2},\frac{2}{2}\right)=(2,1)$ احداثيات المركز

ii) $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$A(-1,1), M(2,1)$

$AM = \sqrt{(2+1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{9+0} = 3 \quad \Rightarrow \quad r = 3$ نصف القطر

$A = r^2\pi = (3)^2\pi = 9\pi$ مساحة الدائرة

---

15 تبرير : فسر لماذا تكون هنالك قيمتان ممكنتان عند البحث عن الإحداثي المجهول لأحد طرفي قطعة مستقيمة عند اعطاء احداثيات الطرف الآخر نقطة المنتصف ؟

الحل : يتطلب قانون المسافة بين نقطتين ربيع القيم . وعند تعويض الأحداثيات والمتغير المجهول A في القانون وتبسيطه فأن النتيجة تكون معادلة تربيعية ينتج عن حلها قيمتان ممكنتان للمتغير المجهول A .

---

16 اكتشف الخطأ : وجدت شهد احداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي طرفيها $(6,1), (8,3)$

$(x_1, y_1) \quad , (x_2, y_2)$

فكتبتها $(1,1) = \left(\frac{8-6}{2}, \frac{3-1}{2}\right)$ اكتشف خطأ شهد وصححه .

الحل :

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$M = \left(\frac{6+8}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = \left(\frac{14}{2}, \frac{4}{2}\right) = (7,2)$$

اكتب كيف يرتبط قانون نقطة المنتصف بإيجاد الوسط الحسابي .

الحل : لإيجاد الوسط الحسابي لعددين فأنك تجمعهما وتقسم الناتج على 2 ولأيجاد احداثي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي تصل بين نقطتين تجمع الإحداثيين السينيين وكذلك الإحداثيين الصاديين وتقسم ناتج كل من المجموعين على 2 وبهذا فأنك تجد المتوسط الحسابي لكل من الإحداثيين السنيين والإحداثيين الصاديين .



النسب المثلثية $(\sin\theta , \cos\theta , \tan\theta)$

حساب المثلثات : هي دراسة العلاقة بين زوايا المثلث واضلاعه .

النسبة المثلثية : هي النسبة التي تقارن بين طولي ضلعين من اضلاع المثلث القائم الزاوية .

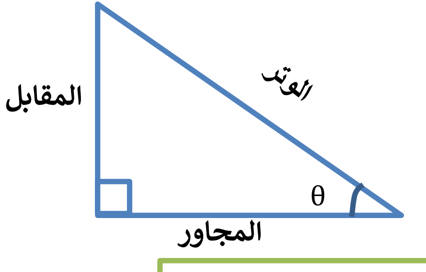
النسبة الأساسية : هي الجيب sin , جيب تام cos , الظل tan

لإيجاد النسب المثلثية (sin , cos , tan) نتبع ما يلي :

1) رسم تخطيطي لمثلث قائم الزاوية وتثبت عليه المعطيات .

2) نستعمل مبرهنة فيثاغورس لإيجاد الضلع المجهول .

3) نستعمل النسب المثلثية لأيجاد المطلوب .



$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$



من الشكل المجاور جد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية θ

الحل :

المقابل 3 ، الوتر 5 ، المجاور 4 ، θ

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ مبرهنة فيثاغورس

$(25)^2 = (AB)^2 + (4)^2$

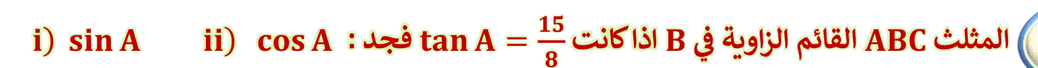
$25 = (AB)^2 + 16$

$(AB)^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow AB = \sqrt{9} = 3\ cm$

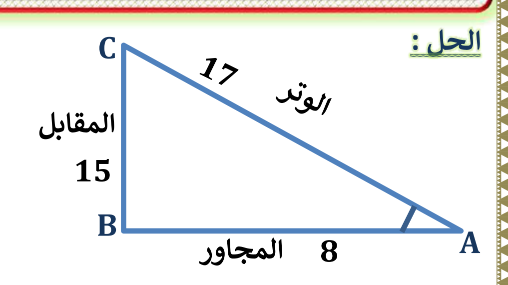
$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$, $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{3}{4}$



المثلث ABC القائم الزاوية في B اذا كانت $\tan A = \frac{15}{8}$ فجد : i) $\sin A$ ii) $\cos A$



الحل :



$\tan A = \frac{15}{8} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$


$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ مبرهنة فيثاغورس

$(AC)^2 = (8)^2 + (15)^2 = 64 + 225 = 289 \quad \Rightarrow \quad AC = \sqrt{289} = 17$

i) $\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{15}{17}$ ii) $\cos B = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{17}$

النسب المثلثية للزوايا الخاصة

النسبة المثلثية	30°	45°	60°	90°	0°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	1
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف	0

مثال أثبت أن : $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ = \sin 90^\circ$

الحل :

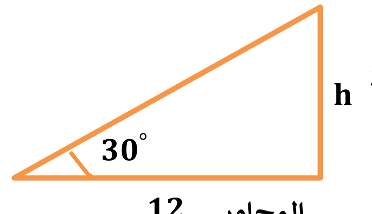
الطرف الايسر= $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

الطرف الأيمن= $\sin 90^\circ = 1 \quad \Rightarrow$ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

مثال وقف رجل امام بناية وعلى بعد 12m من قاعدتها ونظر الى قمة البناية بزاوية مقدارها 30° . جد ارتفاع العمارة

الحل : نفرض ارتفاع البناية $= h$



$\tan 30^{\circ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{12}$ الطرفين في الوسطين

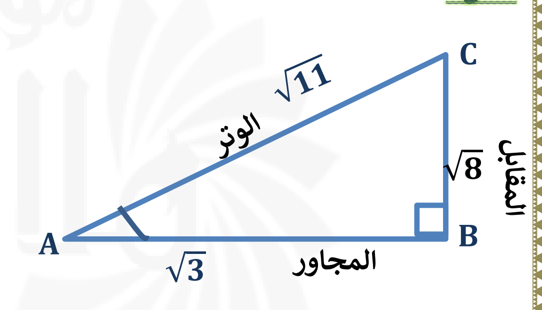
$\sqrt{3}\,h = 12 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad h = 4\sqrt{3}\ m$

علاقات النسب المثلثية

قاطع $(\sec \theta)$	قاطع تمام $(\csc \theta)$	الظل تمام $(\cot \theta)$
تساوي مقلوب $\cos \theta$	تساوي مقلوب $\sin \theta$	تساوي مقلوب $\tan \theta$
$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$	$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$	$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$

مثال مثلث قائم الزاوية في B اذا كانت : $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$ جد : i) $\sec A$ ii) $\csc A$ iii) $\cot A$

الحل :



$\cos A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ مبرهنة فيثاغورس

$\left(\sqrt{11}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + (BC)^2 \quad \Rightarrow \quad 11 = 3 + (BC)^2$

$(BC)^2 = 11 - 3 = 8 \quad \Rightarrow \quad BC = \sqrt{8}$

i) $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} \quad \Rightarrow \quad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$

$ii)\ \sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{11}} \Rightarrow \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$

$iii)\ \tan A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$

مثال جد القيمة العددية للمقدار : $(\sin 45^\circ)(\sec 45^\circ) - (\tan 60^\circ)(\cot 30^\circ) + 2\csc 90^\circ$

الحل : من الجدول نجد قيم النسب المثلثية الخاصة :

$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$\cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$, $\csc 90^\circ = \frac{1}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{1} = 1$

المقدار $(\sin 45^\circ)(\sec 45^\circ) - (\tan 60^\circ)(\cot 30^\circ) + 2\csc 90^\circ$

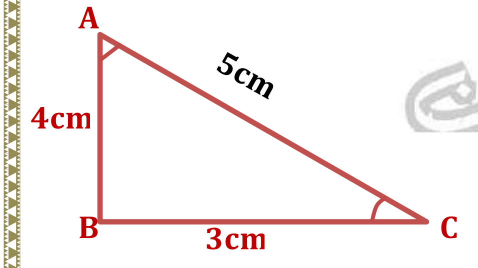
$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2}) - (\sqrt{3})(\sqrt{3}) + 2(1)$

$= 1 - 3 + 2 = 0$

تأكد من فهمك

1 من الشكل المجاور جد النسب المثلثية الآتية :

$i)\ \sin A \quad ii)\ \cos C \quad iii)\ \cot C \quad iv)\ \sec A$



الحل :

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ مبرهنة فيثاغورس

$(AC)^2 = (4)^2 + (3)^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow AC = \sqrt{25} = 5\ cm$

$i)\ \sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$ $\qquad ii)\ \cos C = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$

$iii)\ \tan C = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \cot C = \frac{1}{\tan C} = \frac{3}{4}$

iv) $\cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{4}$

---

2 في المثلث ABC القائم الزاوية في B اذا كانت $\cot A = \sqrt{3}$ فجد :

i) tan A　ii) sin A　iii) csc C　iv) sec A　v) cos A

الحل :

i) $\cot A = \frac{1}{\tan A} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{1}{\tan A}$

$\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$　　مبرهنة فيثاغورس

$(AC)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow AC = \sqrt{4} = 2$

ii) $\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{2}$　　iii) $\sin C = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \csc C = \frac{1}{\sin C} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

iv) $\cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

v) $\cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

---

3 أثبت ما يلي :

i) $(\cos 30^\circ - \sin 45^\circ)(\sin 60^\circ + \cos 45^\circ) = \frac{-5}{4}$

الحل : من الجدول نجد قيم النسب المثلثية الخاصة :

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,　$\csc 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

الطرف الايسر $= (\cos 30^\circ - \csc 45^\circ)(\sin 60^\circ + \sec 45^\circ)$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4} - 2 = \frac{3-8}{4} = \frac{-5}{4}$$ الطرف الايمن

---

ii) $2\sin 30^\circ \sec 30^\circ = \csc 60^\circ$

الحل : من الجدول نجد قيم النسب المثلثية الخاصة :

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad , \quad \sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad , \quad \csc 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

الطرف الايسر $= 2\sin 30^\circ \sec 30^\circ = 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

الطرف الأيمن $= \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ $\therefore$ الطرف الأيمن = الطرف الايسر

---

iii) $(\cos 45^\circ - \csc 45^\circ)(\tan 45^\circ)(\csc 90^\circ) = -\cos 45^\circ$

الحل : من الجدول نجد قيم النسب المثلثية الخاصة :

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \ , \csc 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \ , \tan 45^\circ = 1 \ , \csc 90^\circ = \frac{1}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

$-\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ الطرف الايمن

الطرف الايسر $= (\cos 45^\circ - \csc 45^\circ)(\tan 45^\circ)(\csc 90^\circ)$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)(1)(1) = \frac{1-2}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

الطرف الايمن = الطرف الايسر





السؤال خطأ

$iv)\ \sqrt{\frac{1-\cos 60^\circ}{2}} = \sin 30^\circ$

الحل : من الجدول نجد قيم النسب المثلثية الخاصة :

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$,

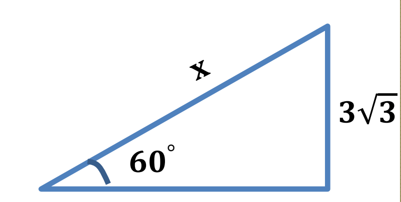
$\sqrt{\frac{1-\cos 60^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2-1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ الطرف الايسر

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ الطرف الأيمن $\Rightarrow$ $\therefore$ الطرف الأيمن = الطرف الايسر

---

4 طائرة ورقية ارتفاعها $3\sqrt{3}$ m عن سطح الأرض اذا كان الخيط المتصل بها يصنع زاوية مقدارها 60° مع الأرض . جد طول الخيط ؟

الحل : نفرض طول الخيط $= x$



$\sin 60^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

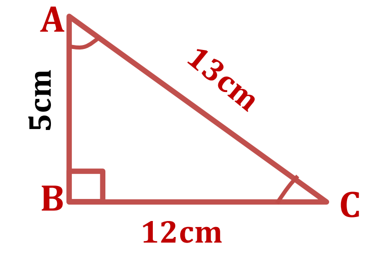
$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \sqrt{3}\,x = 6\sqrt{3}$

$x = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 6$ طول الخيط

تدرب وحل التمرينات

5 من الشكل المجاور د النسب المثلثية الآتية :

$i)\ \cot A \quad ii)\ \cot C \quad iii)\ \sec C \quad iv)\ \csc A$



الحل :

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ مبرهنة فيثاغورس

$(13)^2 = (AB)^2 + (12)^2 \Rightarrow 169 = (AB)^2 + 144$

$(AB)^2 = 169 - 144 = 25 \Rightarrow AB = \sqrt{25}\ 5cm$

$i)\ \tan A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{12}{5} \Rightarrow \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{5}{12}$

$ii)\ \tan C = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{5}{12} \Rightarrow \cot C = \frac{1}{\tan C} = \frac{12}{5}$

$iii)\ \cos C = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{12}{13} \Rightarrow \sec C = \frac{1}{\cos C} = \frac{13}{12}$

$iv)\ \sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{12}{13} \Rightarrow \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{13}{12}$

---

6 في المثلث ABC القائم الزاوية في B اذا كانت $\sec A = \sqrt{2}$ فجد :

i) sin A ii) cot C iii) csc A iv) cos C

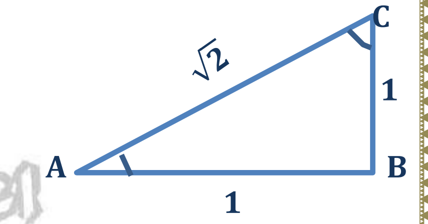
الحل :

$\sec A = \frac{1}{\cos A} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{1}{\cos A} \Rightarrow \cos A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ مبرهنة فيثاغورس

$(\sqrt{2})^2 = (1)^2 + (BC)^2 \Rightarrow 2 = 1 + (BC)^2$

$(BC)^2 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow BC = 1$



$i)\ \sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$ii)\ \tan C = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \cot C = \frac{1}{\tan C} = \frac{1}{1} = 1$

$iii)\ \sin A = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

$iv)\ \cos C = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

7 أثبت ما يلي :

07703153998  اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين

i) $\cos 60^\circ \csc 60^\circ + \sin 60^\circ \sec 60^\circ = \frac{4}{\sqrt{3}}$

الحل : من الجدول نجد قيم النسب المثلثية الخاصة :

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} , \csc 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} , \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} , \sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$\cos 60^\circ \csc 60^\circ + \sin 60^\circ \sec 60^\circ$ المقدار

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{1+3}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$ الطرف الايمن

---

ii) $\sin 45^\circ \sec 45^\circ + \csc 45^\circ \sin 45^\circ = 2$

الحل : من الجدول نجد قيم النسب المثلثية الخاصة :

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} , \sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} , \csc 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} , \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\sin 45^\circ \sec 45^\circ + \csc 45^\circ \sin 45^\circ$ المقدار

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + 1 = 2$$ الطرف الايمن

iii) $\frac{\cot 45^\circ + \sin 90^\circ}{2 \sec 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل : من الجدول نجد قيم النسب المثلثية الخاصة :

$$\cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = \frac{1}{1} = 1 , \sin 90^\circ = 1 , \quad \sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

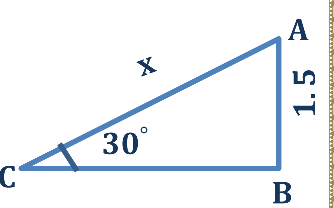
$$\frac{\cot 45^\circ + \sin 90^\circ}{2 \sec 30^\circ} = \frac{1+1}{2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{2}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



تدرب وحل مسائل حياتية

8 رياضة : عمل جهاز رياضي مائل لتمرين السير بزاوية قدرها 30° فاذا كان طرف الجهاز يرتفع $1.5m$ عن سطح الأرض . فما طول حزام الجهاز ؟

الحل : نفرض طول الحزام $= x$



$\sin 30^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

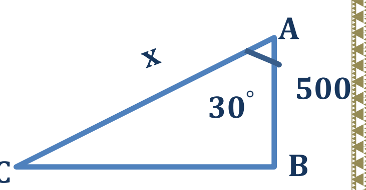
$\frac{1}{2} = \frac{1.5}{x}$

$x = 2(1.5) = 3m$ طول الحزام

---

9 تزلج على الجليد : في موقع للتزلج على احد التلال كان ارتفاع التلة الرئيسية $500m$ وزاوية ميلها عن مستوى الأرض 60° . ما طول سطح التزلج ؟

الحل : نفرض طول السطح $= x$



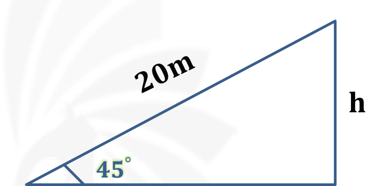
$\cos 60^\circ = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$\frac{1}{2} = \frac{500}{x} \Rightarrow x = 2(500) = 1000m$ طول السطح

---

10 سلم اطفاء الحرائق : سلم اطفاء حريق طوله $20m$ يرتكز احد طرفيه على بناية والطرف الأخر على ارض افقية بزاوية 45° جد ارتفاع نقطة ارتكاز طرف السلم على البناية .

الحل : نفرض ارتفاع البناية $= h$

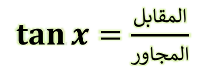
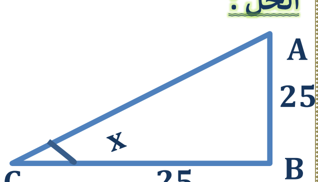


$\sin 45^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{h}{20}$

$\sqrt{2}\,h = 20 \Rightarrow h = \frac{20}{\sqrt{2}}$ ارتفاع البناية


11 حديقة : وقفت بنان على بعد $25m$ من قاعدة شجرة ارتفاعها $25m$. فما قياس الزاوية التي تشكلها مع قمة الشجرة ؟

الحل :

$\tan x = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$\tan x = \frac{25}{25} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 45^\circ$

فكر

12 **تحد :** في الشكل المجاور :جد القيم المؤشرة (؟) باستعمال النسب المثلثية .

الحل :

$\cos 60^\circ = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$\frac{1}{2} = \frac{؟}{4} \Rightarrow 2؟ = 4 \Rightarrow ؟ = \frac{4}{2} = 2\,cm$

$\sin 60^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{؟}{4} \Rightarrow 2؟ = 4\sqrt{3} \Rightarrow ؟ = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\,cm$

قياس الزاوية القائمة $= 90^\circ$ ⟸ مجموع قياسات زوايا المثلث $= 180^\circ$

$؟ + 90^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow ؟ + 150^\circ = 180^\circ \Rightarrow ؟ = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

13 **مسألة مفتوحة :** ABC مثلث قائم الزاوية في B , $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ كيف تجد قيمة الزاوية C

الحل :

الطريقة الثانية



$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\cos C = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow C = 30^\circ$

الطريقة الاولى

$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 60^\circ$

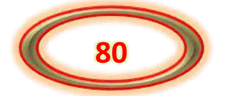
قياس الزاوية القائمة $= 90^\circ$ ⟸ مجموع قياسات زوايا المثلث $= 180^\circ$

$C + 90^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow C + 150^\circ = 180^\circ$

$C = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$



14 **تبرير :** اذا كان جيب الزاوية وجيب تمامها متساويين في مثلث قائم الزاوية . ما نوع المثلث من حيث اطوال اضلاعه ؟





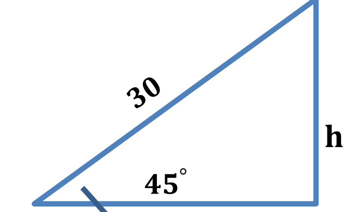
اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

الحل : نوع المثلث متساوي الساقين

اكتب مسألة تستعمل فيها نسبة الجيب لإيجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية . ثم حلها ؟

الحل : طائرة ورقية طول خيطها 30m فاذا كانت الزاوية التي يصنعها الخيط مع الأرض هي 45° جد ارتفاع الطائرة الورقية عن الأرض ؟

نفرض ارتفاع الطائرة $= h$



$$\sin 45^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{h}{30}$$

$$\sqrt{2}\,h = 30$$

$$h = \frac{30}{\sqrt{2}} = \frac{30}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$h = \frac{30\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}\ m$$

خطة حل المسألة (تحديد معقولية الاجابة)

مثال اذا كانت النقطة $A(3,-2)$ تمثل موقع بيت محمد على المستوي الإحداثي والنقطة $B(3,4)$ تمثل موقع مدرسته . قطع محمد ثلث المسافة بين البيت والمدرسة . فهل تمثل المسافة $1.2km$ تقديرا معقولا أم المسافة $1.9km$ ؟ اذا كان طول كل مربع في المستوي الإحداثي يساوي $1km$

الحل : محمد قطع المسافة $\frac{1}{3}$ فيمكن تقسيم المسافة الى 3 مسافات متساوية .

(x_1, y_1) , (x_2, y_2)

$A(3,-2), B(3,4)$

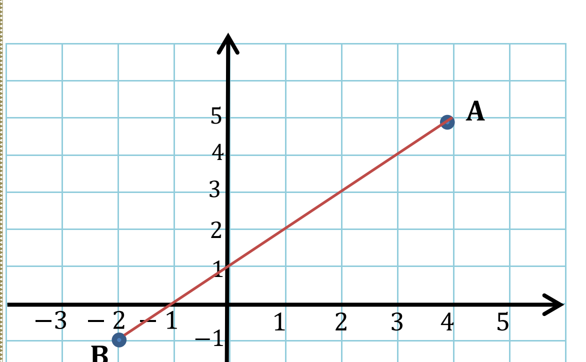
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ المسافة بين نقطتين

$$AB = \sqrt{(3-3)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{0+36} = 6\ km$$

$$\frac{1}{3} \times 6 = 2\ km$$ المسافة التي قطعها محمد

المسافة $1.9km$ اقرب الى $2km$ منه الى المسافة $1.2km$ $\Leftarrow$ $\therefore$ المسافة المعقولة هي $1.9km$

مسائل



حل المسائل التالية باستراتيجية (تحديد معقولية الاجابة)

1 قالت جمانة أن $\frac{1}{3}$ المسافة بين النقطتين A, B كما في الشكل المجاور تساوي تقريبا 3cm وقالت أختها سالي أن $\frac{1}{2}$ المسافة بين نفس النقطتين تساوي تقريبا 2cm . أيتهما اجابتها معقولة ؟

الحل : من الشكل اعلاه نجد النقطتين : $A(4,5)\ ,\ B(-2,-1)$ $\quad (x_1,y_1)\ ,\ (x_2,y_2)$

المسافة بين نقطتين $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$AB=\sqrt{(-2-4)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{(-6)^2+(-6)^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}\ cm$$

جمانة $\frac{1}{3}\times 6\sqrt{2}=2\sqrt{2}=2(1.4)=2.8\ cm$

سالي $\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}=3\sqrt{2}=3(1.4)=4.2\ cm$

اجابة جمانة معقولة لأنها أقرب الى 3cm



هل احداثيات النقطة $(-3,-2)$ هل الأقرب الى نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين $A(5,1), B(3,-5)$ أم النقطة $(4,-1)$ ؟

الحل : نجد نقطة المنتصف بين النقطتين : $A(5,1)\ ,\ B(3,-5)$ $\quad (x_1,y_1)\ ,\ (x_2,y_2)$

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{5+3}{2},\frac{1+(-5)}{2}\right)=\left(\frac{8}{2},\frac{-4}{2}\right)=(4,-2)$$

النقطة $(4,-1)$ أقرب الى نقطة المنتصف $(4,-2)$



المسافة بين مدينتين 280km هل 20% من المسافة بين المدينتين تقريبا 69km أم 50km ؟

الحل :

$$20\%\times 280=\frac{20}{100}\times 280=\frac{5600}{100}=56km$$

المسافة 56km أقرب الى 50km منه الى 69km



الجدول أدناه يمثل ما قطعه ثلاثة اشخاص لمسافة مقدارها 160km




اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998

النسبة المئوية لما قطعه الشخص الأول	النسبة المئوية لما قطعه الشخص الثاني	النسبة المئوية لما قطعه الشخص الثالث
50%	70%	80%

ما التقدير المعقول لما قطعه الشخص الأول والثالث ؟ أهو 100km أم 129km .

الحل :

الشخص الأول $50\% \times 160 = \frac{50}{100} \times 160 = \frac{8000}{100} = 80km$

الشخص الثالث $80\% \times 160 = \frac{80}{100} \times 160 = \frac{12800}{100} = 128km$

التقدير المعقول للشخص الأول هو 100km لأنه أقرب الى 80km

التقدير المعقول للشخص الثالث هو 129km لأنه أقرب الى 128km



الاختيار من متعدد

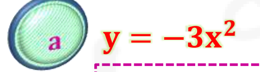
التمثيل البياني للمعادلات في المستوي الاحداثي

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

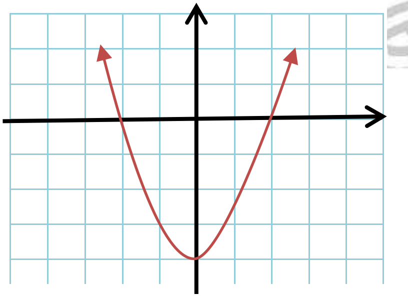
1 المستقيم الذي معادلته $y = \frac{3}{2}$

a يقطع المحورين b يوازي محور الصادات c يوازي محور السينات d لا يقطع أي من المحورين





2 أي المعادلات الآتية تعبر عن المعادلة المتمثلة بيانيا جانبا ؟



a $y = -3x^2$ b $y = 2x^2 + 4$

c $y = x^2 - 4$ d $y = 3x^2 - 4$

الحل :

x	$x^2 - 4$	y	(x,y)
1	$(1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$	−3	(1,−3)
2	$(2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$	0	(2,0)
0	$(0)^2 - 4 = 0 - 4 = -4$	−4	(0,−4)
−1	$(-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$	−3	(−1,−3)
−2	$(-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$	0	(−2,0)

3 أي المعادلات الآتية تعبر عن المعادلة المتمثلة بيانيا جانبا ؟

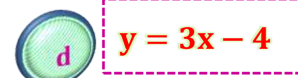
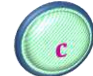




اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

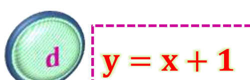
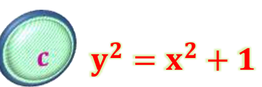
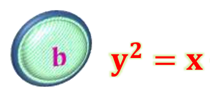
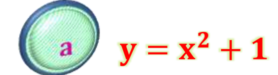
$y = 4x + 3$ $y = 3x + 4$

الحل :

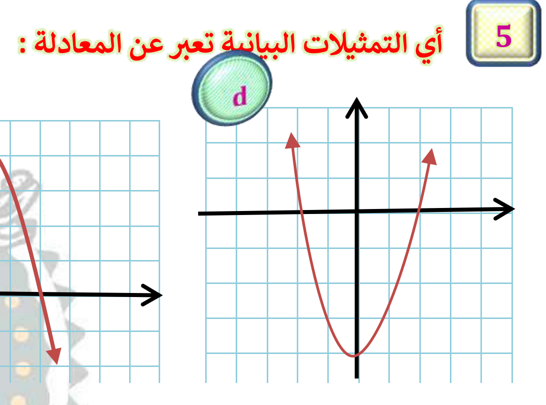
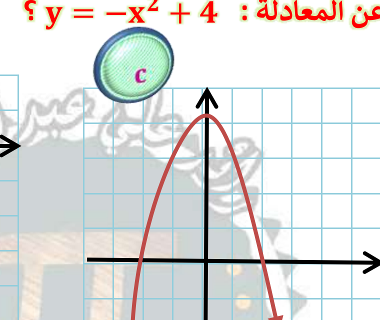
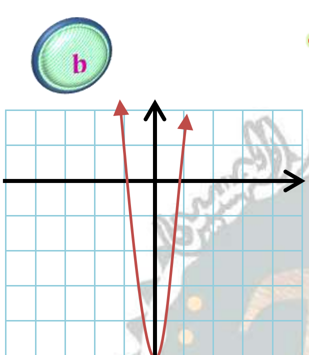
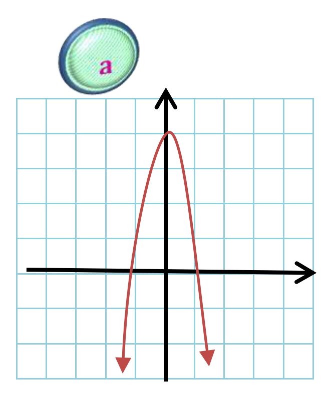
 $y = 3x - 4$  $y = -3x + 4$

x	$y = 3x - 4$	(x, y)
1	$3(1) - 4 = 3 - 4 = -1$	$(1, -1)$
2	$3(2) - 4 = 6 - 4 = 2$	$(2, 2)$

4 أي المعادلات الآتية تعبر عن معادلة خطية ؟

 $y = x + 1$  $y^2 = x^2 + 1$  $y^2 = x + 1$  $y = x^2 + 1$

5 أي التمثيلات البيانية تعبر عن المعادلة : $y = -x^2 + 4$ ؟

الحل :

x	$-x^2 + 4$	y	(x, y)
1	$-(1)^2 + 4 = -1 + 4 = 3$	3	$(1, 3)$
2	$-(2)^2 + 4 = -4 + 4 = 0$	0	$(2, 0)$
0	$-(0)^2 + 4 = 0 + 4 = 4$	4	$(0, 4)$
-1	$-(-1)^2 + 4 = -1 + 4 = 3$	3	$(-1, 3)$
-2	$-(-2)^2 + 4 = -4 + 4 = 0$	0	$(-2, 0)$

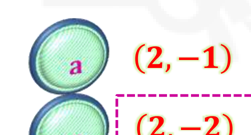
الجواب فرع 

6 لتمثيل المعادلة غير الخطية نحتاج الى :

 نقطة واحدة على الأقل  نقطتان على الأكثر  نقطتان فقط 

7 ما احداثيا رأس المنحني الممثل جانبا ؟



 $(2, -1)$  $(1, 2)$

c $(2, -2)$   $(0, 2)$

ميل المستقيم

صفحة 98

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين  07703153998

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي :



$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

أي ميل يعبر عن ميل المستقيم المار بالنقطتين $(-1, 3), (5, -2)$

a) $\frac{5}{6}$ b) $-\frac{5}{6}$ c) $\frac{-5}{6}$ d) $\frac{6}{5}$

الحل :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-3}{5-(-1)} = \frac{-5}{5+1} = \frac{-5}{6}$$



المستقيم الموازي لمحور الصادات يكون ميله :

a) صفرا b) غير معرف c) سالب d) موجب



المقطع الصادي للمستقيم الذي معادلته $3x - 5y = 15$ هو :

a) -5 b) 3 c) 5 d) -3

الحل :

$$x = 0 \Rightarrow 3(0) - 5y = 15 \Rightarrow -5y = 15 \Rightarrow y = \frac{15}{-5} = -3$$



نقطة تقاطع المستقيم الذي معادلته $x + y = 6$ مع محور السينات هي :

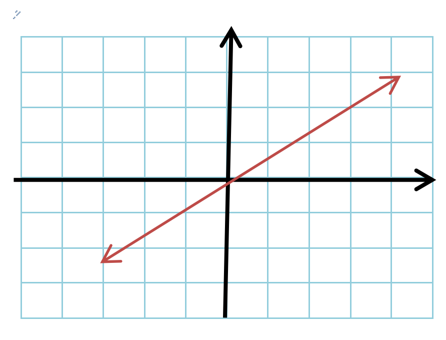
a) $(0, 6)$ b) $(-6, 0)$ c) $(6, 0)$ d) $(0, 0)$

الحل :

$y = 0 \Rightarrow x + 0 = 6 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow (6, 0)$ نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي $\therefore$

5

أي المستقيمات الآتية تعبر عن المستقيم الممثل جانبا ؟



a) $2x - 3y = 0$ b) $3y + 2x = 0$

c) $3y - 2x = 0$ d) $2x + 3y = 0$

الحل :

$$2x - 3y = 0 \Rightarrow 3y = 2x \Rightarrow y = \frac{2}{3}x$$

x	$y = \frac{2}{3}x$	(x, y)







0	$\frac{2}{3}(0) = 0$	$(0,0)$
3	$\frac{2}{3}(3) = 2$	$(3,2)$
-3	$\frac{2}{3}(-3) = -2$	$(-3,-2)$



المستقيم الموازي لمحور السينات يكون ميله :

a) صفرا   b) غير معرف   c) سالب   d) موجب

7 ما ميل المستقيم $3x - 2y = -6$ ؟

a) $-\frac{3}{2}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) 3   d) $\frac{3}{2}$

الحل :

$3x - 2y = -6 \Rightarrow 2y = 3x + 6 \} \div 2$

$y = \frac{3}{2}x + 3$

$y = mx + k \Rightarrow m = \frac{3}{2} \quad , \quad k = 3$



8 ميل المستقيم المار بالنقطتين $(8,-3), (5,-3)$ ؟

a) موجب   b) سالب   c) صفر   d) غير معرف

الحل :

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{-3-(-3)}{5-8} = \frac{-3+3}{-3} = \frac{0}{-3} = 0$



اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي :



1 معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ $(-2, -3), (-1, -7)$ هي :

a) $y - 4x = -11$ b) $y - 4x = 11$ c) $4y + x = -11$ d) $y + 4x = -11$

الحل :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{y - (-3)}{x - (-2)} = \frac{-7 - (-3)}{-1 - (-2)} \Rightarrow \frac{y + 3}{x + 2} = \frac{-7 + 3}{-1 + 2}$$

$$\frac{y + 3}{x + 2} = \frac{-4}{1}$$ الطرفين في الوسطين

$y + 3 = -4x - 8 \Rightarrow y + 4x = -8 - 3 \Rightarrow y + 4x = -11$ معادلة المستقيم



2 المستقيم الذي معادلته $y + x = 0$ ميله واحدى نقاطه هما :

a) $m = -1 , (4, 4)$ b) $m = 1 , (4, 4)$ c) $m = -1 , (4, -4)$ d) $m = 1 , (-4, -4)$

الحل :

$y + x = 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow y - 0 = -1(x - 0)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$m = -1 , (x_1, y_1) = (0, 0) \Rightarrow$ الاختيارات كلها خاطئة



3 معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{3}{5}$ ومقطعه السيني يساوي 2 هو :

a) $5y + 3x = -6$ b) $5y - 3x = 6$ c) $3y - 5x = -6$ d) $3y + 5x = 6$

الحل :

$m = \frac{3}{5}$, $x = 2 \Rightarrow \underset{(2, 0)}{(x_1, y_1)}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ بالتعويض الميل والنقطة

$y - 0 = \frac{3}{5}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{3}{5}(x - 2)$

$5y = 3x - 6 \Rightarrow 5y - 3x = -6$ معادلة المستقيم

الاختيارات كلها خاطئة .





4 استعمل معادلة المستقيم $y = mx + k$ وجد قيمة k, m للمستقيم $7y - 3x = 21$:





07703153998 اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين

a) $m = \frac{3}{7}, k = -3$ b) $m = \frac{7}{3}, k = 3$ c) $m = -\frac{3}{7}, k = -3$ d) $m = \frac{3}{7}, k = 3$

الحل :

$7y - 3x = 21 \Rightarrow 7y = 3x + 21 \} \div 7$

$y = \frac{3}{7}x + 3$

$y = mx + k \Rightarrow m = \frac{3}{7}, k = 3$


5 أي النقط التالية تقع على المستقيم الذي معادلته $y + 4x = 0$

a) $(1, 4)$ b) $(4, -1)$ c) $(4, 1)$ d) $(1, -4)$

الحل :

$y + 4x = 0 \quad , \quad x = 1$

$y + 4(1) = 0 \Rightarrow y + 4 = 0 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow (x, y) = (1, -4)$


6 معادلة المستقيم الذي ميله (-1) ومقطعه الصادي يساوي (-2) هو :

a) $y + x - 2 = 0$ b) $y + x + 2 = 0$ c) $y + x - 2 = 0$ d) $y - x - 2 = 0$

الحل :

$m = -1 \, , \quad y = -2 \Rightarrow \underset{(0, -2)}{(x_1, y_1)}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ بالتعويض الميل والنقطة

$y - (-2) = -1(x - 0) \Rightarrow y + 2 = -x \Rightarrow y + x + 2 = 0$ معادلة المستقيم


7 ما هي على صورة الميل – التقاطع معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ $(-1, -2), (1, 6)$

a) $y = -3x + 6$ b) $y = 4x - 2$ c) $y = 4x + 2$ d) $y = 2x + 4$

الحل :

$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{y - (-2)}{x - (-1)} = \frac{6 - (-2)}{1 - (-1)} \Rightarrow \frac{y + 2}{x + 1} = \frac{6 + 2}{1 + 1}$

$\frac{y + 2}{x + 1} = \frac{8}{2} \Rightarrow \frac{y + 2}{x + 1} = 4$ الطرفين في الوسطين

$y + 2 = 4x + 4 \Rightarrow y = 4x + 4 - 2 \Rightarrow y = 4x + 2$ معادلة المستقيم

8

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

ثمن وجبة طعام في احد المطاعم 25 الف دينار مضافا اليها 3 الاف دينار لكل نوع اضافي من المقبلات أي المعادلات تمثل ثمن وجبة طعام مع (x) من المقبلات ؟

a) $y = 25x + 3$ b) $y = 25x - 3$ c) $y = 3x + 25$ d) $y = 3x - 25$

الحل : نفرض المقبلات $= x$ ⟸ كل نوع اضافي من المقبلات $= 3x$

$y = 3x + 25$



المستقيمات المتوازية والمتعامدة

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي :



المستقيم المار بالنقطتين $\overset{(x_1,y_1),(x_2,y_2)}{(1,9),(7,1)}$ يوازي المستقيم الذي ميله :

a) $\frac{-3}{4}$ b) $\frac{-4}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{3}$

الحل :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-9}{7-1} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$$




اذا كان m_2, m_1 يمثلان ميلي مستقيمين متعامدين فأن :

a) $m_1 + m_2 = -1$ b) $\frac{m_1}{m_2} = -1$ c) $m_1 \times m_2 = -1$ d) $m_1 - m_2 = -1$



قيمة a التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $\overset{(x_1,y_1),(x_2,y_2)}{(-1,4),(a,-1)}$ تساوي $\frac{-5}{3}$ هي :

a) 4 b) − 2 c) − 4 d) 2

الحل :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{-5}{3} = \frac{-1-4}{a-(-1)} \Rightarrow \frac{-5}{3} = \frac{-5}{a+1}$$ الطرفين في الوسطين

$$-5a - 5 = -15 \Rightarrow -5a = -15 + 5 \Rightarrow -5a = -10 \Rightarrow a = \frac{-10}{-5} = 2$$




معادلة المستقيم المار بالنقطة $(0,3)$ والعمودي على المستقيم الذي ميله $\frac{4}{3}$ هي :

a) $3y + 4x = 12$ b) $3y + 4x = -12$ c) $4y - 3x = 12$ d) $4y + 4x = 12$

الحل :

$m = \frac{-3}{4}$ ميل العمود

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = \frac{-3}{4}(x - 0) \Rightarrow 4y - 12 = -3x \Rightarrow 4y + 3x = 12$ معادلة المستقيم



5 اذا كان $m_1 = m_2$ يمثلان ميلي المستقيمين L_1, L_2 فأن :

a) $\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2}$ b) $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ c) $\overleftrightarrow{L_1}, \overleftrightarrow{L_2}$ متقاطعان d) ليس بينهما اي علاقة

6 اي المستقيمات الآتية توازي المستقيم الذي معادلته $6y - 5x = 30$

a) $6y + 5x = 30$ b) $5y - 6x = 30$ c) $6y - 5x = 25$ d) $6y + 5x = 25$

الحل :

$6y - 5x = 30 \Rightarrow 6y = 5x + 30 \} \div 6$ $6y - 5x = 25 \Rightarrow 6y = 5x + 25 \} \div 6$

$y = \frac{5}{6}x + 5$ $y = \frac{5}{6}x + \frac{25}{6}$

$y = mx + k \Rightarrow m_1 = \frac{5}{6}$ $y = mx + k \Rightarrow m_2 = \frac{5}{6}$

$m_1 = m_2 = \frac{5}{6}$





7 اي المستقيمات الآتية عمودية على المستقيم الذي معادلته $3y + 2x = 6$

a) $3y + 2x = -6$ b) $3y - 2x = -6$ c) $2y + 3x = 6$ d) $2y - 3x = 6$

الحل :

$3y + 2x = 6 \Rightarrow 3y = -2x + 6 \} \div 3$ $2y - 3x = 6 \Rightarrow 2y = 3x + 6 \} \div 2$

$y = \frac{-2}{3}x + 2$ $y = \frac{3}{2}x + 3$

$y = mx + k \Rightarrow m_1 = \frac{-2}{3}$ $y = mx + k \Rightarrow m_2 = \frac{3}{2}$

$m_1 \times m_2 = \frac{-2}{3} \times \frac{3}{2} = -1$





المسافة بين نقطتين

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي :



1 المسافة بين نقطتين : $(0,3),(2,-5)$ تساوي :

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

a) $-2\sqrt{17}$　　b) $\sqrt{10}$　　c) $17\sqrt{2}$　　d) $2\sqrt{17}$

الحل :

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(2-0)^2+(-5-3)^2}=\sqrt{(2)^2+(-8)^2}=\sqrt{4+64}$$

$$=\sqrt{68}=\sqrt{4\times 17}=2\sqrt{17}$$



2 نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(3,-1),(7,-3)$:

a) $(5,2)$　　b) $(-2,5)$　　c) $(5,-2)$　　d) $(-5,-2)$

الحل :

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{3+7}{2},\frac{-1-3}{2}\right)=\left(\frac{10}{2},\frac{-4}{2}\right)=(5,-2)$$



3 اذا كانت نقطة منتصف قطعة مستقيم $\overline{AB}$ هي $(2,1)$ حيث : $A(a,b), B(3,2)$ فأن قيمة a,b هي :

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

a) $a=1, b=1$　　b) $a=1, b=-1$　　c) $a=-1, b=0$　　d) $a=1, b=0$

الحل :

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$(2,1)=\left(\frac{a+3}{2},\frac{b+2}{2}\right)$$

$$2=\frac{a+3}{2}\Rightarrow a+3=4\Rightarrow a=4-3=-1$$

$$1=\frac{b+2}{2}$$

$$b+2=2\Rightarrow b=2-2=0$$



4 قانون المسافة بين النقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ هو :

a) $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2+y_1)^2}$ b) $\sqrt{(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2}$

c) $\sqrt{(x_2+x_1)^2+(y_2+y_1)^2}$ d) $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$





5 قانون نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ هو :

a) $\left(\frac{x_1-x_2}{2},\frac{y_1-y_2}{2}\right)$ b) $\left(\frac{x_1+x_2}{3},\frac{y_1+y_2}{3}\right)$

c) $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ d) $\left(\frac{y_1+y}{2},\frac{x_1+x_2}{2}\right)$



6 النقطة $(2,-2)$ هي منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين :

a) $(-8,-1),(4,-3)$ b) $(8,1),(1,-3)$ c) $(8,1),(4,-3)$ d) $(8,-1),(-4,-3)$

الحل :

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$
$(8,-1),(-4,-3)$

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{8-4}{2},\frac{-1-3}{2}\right)=\left(\frac{4}{2},\frac{-4}{2}\right)=(2,-2)$$

7 باستعمال قانون المسافة : المثلث الذي رؤوسه $A(3,-1),B(-3,3),C(-3,-1)$:

a) متساوي الساقين b) متساوي الاضلاع c) مختلف الاضلاع حاد الزوايا d) مختلف الاضلاع قائم الزاوية

الحل :

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$A(3,-1),B(-3,3)\ \Rightarrow\ AB=\sqrt{(-3-3)^2+(3-(-1))^2}=\sqrt{(-6)^2+(4)^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$$

$$B(-3,3),C(-3,-1)\ \Rightarrow BC=\sqrt{(-3-(-3))^2+(-1-3)^2}=\sqrt{0+(-4)^2}=\sqrt{16}=4$$

$$A(3,-1),C(-3,-1)\ \Rightarrow AC=\sqrt{(-3-3)^2+(-1-(-1))^2}=\sqrt{(-6)^2+0}=\sqrt{36}=6$$

$$(AB)^2=(BC)^2+(AC)^2$$



اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

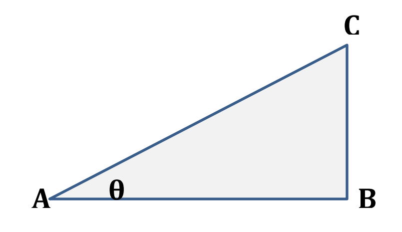
$\left(\sqrt{52}\right)^2 = (4)^2 + (6)^2 \quad \Rightarrow \quad 52 = 16 + 36 = 52$

المثلث مختلف الاضلاع قائم الزاوية

صفحة 102

النسب المثلثية

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي :



1 من الشكل المجاور النسب المثلثية $\sin\theta$ تكتب :

a) $\frac{AB}{AC}$ b) $\frac{BC}{AB}$ c) $\frac{BC}{AC}$ d) $\frac{AB}{AC}$

الحل :

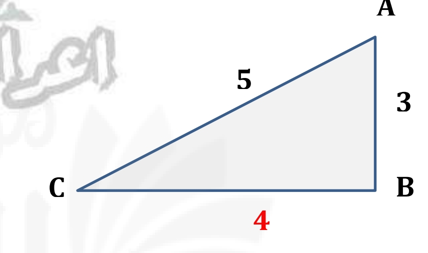
$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AC}$



2 ABC مثلث قائم الزاوية في B اذا كانت $\cos A = \frac{3}{5}$ فأن $\tan C$: يساوي :

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{3}{4}$

الحل :



$\cos A = \frac{3}{5} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ مبرهنة فيثاغورس

$(5)^2 = (3)^2 + (BC)^2 \quad \Rightarrow \quad 25 = 9 + (BC)^2$

$(BC)^2 = 25 - 9 = 16 \quad \Rightarrow \quad BC = \sqrt{16} = 4$

$\tan C = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{3}{4}$



3 اذا كانت : $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ فأن قيمة θ يساوي :

a) 45° b) 60° c) 90° d) 30°



4 القيمة العددية للمقدار $\sin 30^{\circ}\ \cos 30^{\circ}$ تساوي :

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

الحل : من الجدول :

$$\sin 30^{\circ} = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^{\circ}\ \cos 30^{\circ} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



5 مقلوب النسبة $\cos \theta$ هي :

a) $\sin\theta$ b) $\sec\theta$ c) $\csc\theta$ d) $\cot\theta$

الحل :

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$$



6 القيمة العددية للمقدار : $(\sec 60^{\circ})^2 - (\tan 60^{\circ})^2$ تساوي :

a) -1 b) 0 c) 2 d) 1

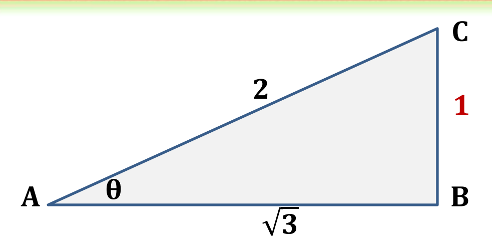
الحل : من الجدول :

$$\sec 60^{\circ} = \frac{1}{\cos 60^{\circ}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \quad , \quad \tan 60^{\circ} = \sqrt{3}$$

$$(\sec 60^{\circ})^2 - (\tan 60^{\circ})^2 = (2)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1$$

7 ABC مثلث قائم الزاوية في B كما في الشكل المجاور :
القيمة العددية للمقدار : $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2$ يساوي :

a) -1 b) 0 c) 2 d) 1



الحل :

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ مبرهنة فيثاغورس

$(2)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + (BC)^2 \Rightarrow 4 = 3 + (BC)^2 \Rightarrow (BC)^2 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow BC = 1$

$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{2}$, $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

8 اذا كانت : $\csc\theta = 2$ فأن قيمة الزاوية θ هي :

a) 45° b) 60° c) 90° d) 30°

الحل :

$\csc\theta = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow 2 = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998

مراجعة الفصل

صفحة 32

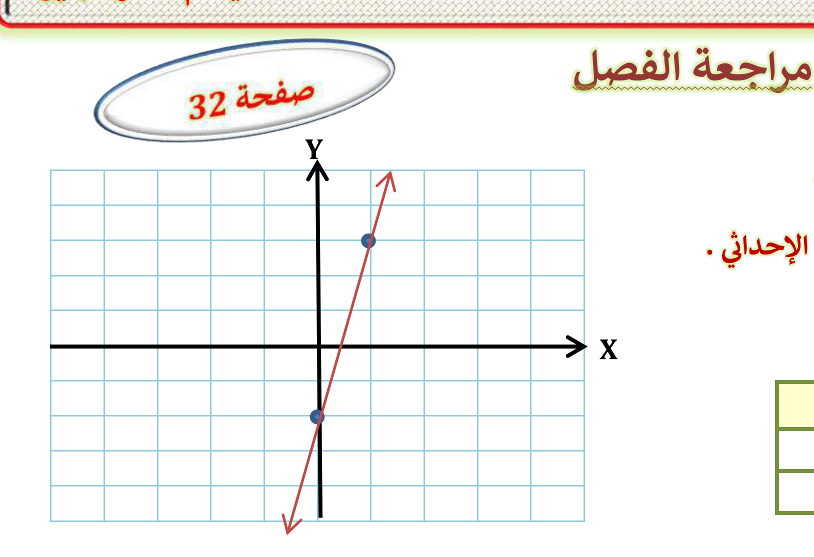
التمثيل البياني للمعادلات في المستوي الأحداثي



مثل المعادلة $y = 5x - 2$ في المستوي الإحداثي .

الحل :

x	$y = 5x - 2$	(x, y)
0	$5(0) - 2 = 0 - 2 = -2$	$(0, -2)$
1	$5(1) - 2 = 5 - 2 = 3$	$(1, 3)$

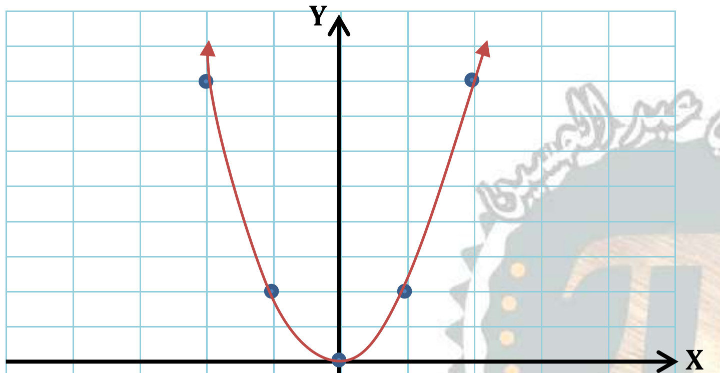




مثل المعادلة $y = 2x^2$ في المستوي الاحداثي .

الحل :

x	$y = 2x^2$	(x, y)
0	$2(0)^2 = 2(0) = 0$	$(0, 0)$
1	$2(1)^2 = 2(1) = 2$	$(1, 2)$
2	$2(2)^2 = 2(4) = 8$	$(2, 8)$
−1	$2(-1)^2 = 2(1) = 2$	$(-1, 2)$
−2	$2(-2)^2 = 2(4) = 8$	$(-2, 8)$

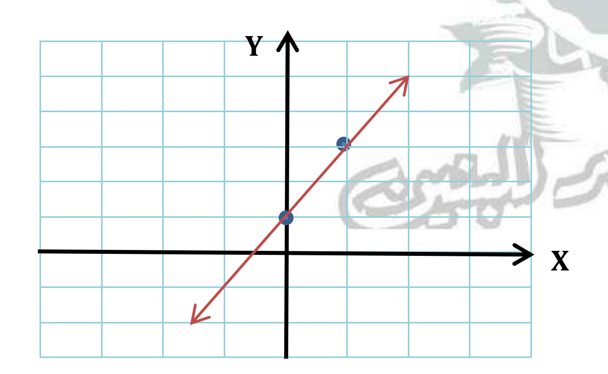




مثل المعادلة $y = 2x + 1$ في المستوي الاحداثي .

الحل :

x	$y = 2x + 1$	(x, y)
0	$2(0) + 1 = 0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$	$(1, 3)$



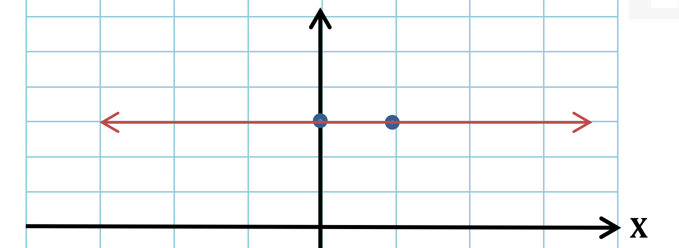
تدريب 3

مثل المعادلة $y = 3$ في المستوي الاحداثي .

الحل :

x	$y = 3$	(x, y)
0	3	$(0, 3)$
1	3	$(1, 3)$

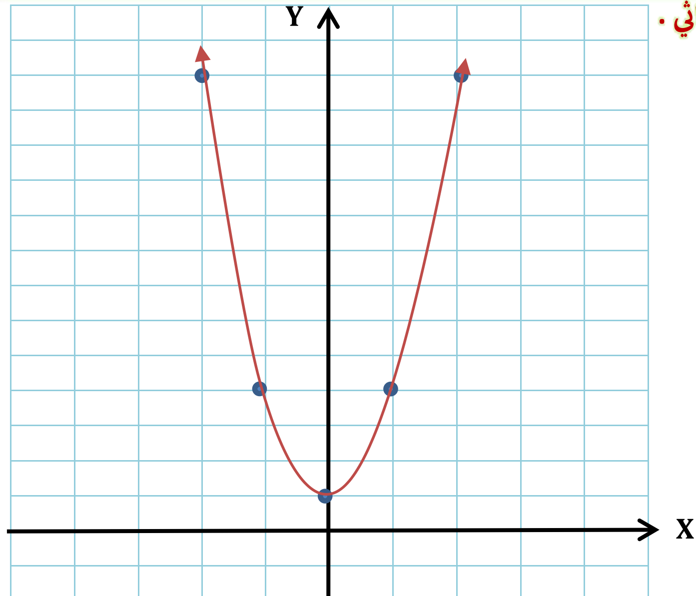
يوازي محور السينات وعمودي على محور الصادات عند $(0, 3)$



تدريب 2 مثل المعادلة $y = 3x^2 + 1$ في المستوي الاحداثي .

الحل :

x	$y = 3x^2 + 1$	(x, y)
0	$3(0)^2 + 1 = 0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$3(1)^2 + 1 = 3 + 1 = 4$	$(1, 4)$
2	$3(2)^2 + 1 = 12 + 1 = 13$	$(2, 13)$
-1	$3(-1)^2 + 1 = 3 + 1 = 4$	$(-1, 4)$
-2	$3(-2)^2 + 1 = 12 + 1 = 13$	$(-2, 13)$



تدريب 4 مثل المعادلة $x = 3$ في المستوي الاحداثي .

الحل :

يوازي محور الصادات وعمودي على محور السينات عند النقطة $(3, 0)$

ميل المستقيم

صفحة 32

مثال جد ميل المستقيم المار بالنقطتين :

$(x_1, y_2), (x_2, y_2)$

i) $(5, -2), (3, -1)$

الحل :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - (-2)}{3 - 5}$$

$$m = \frac{-1 + 2}{-3} = -\frac{1}{3}$$

$(x_1, y_2), (x_2, y_2)$

ii) $(7, -3), (5, -3)$

الحل :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - (-3)}{5 - 7}$$

$$m = \frac{-3 + 3}{-2} = \frac{0}{-2} = 0$$

تدريب 1 جد ميل المستقيم المار بالنقطتين :

iii) $(4,2),(4,-1)$ — $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-1-2}{4-4}$$

$$m=\frac{-3}{0}$$ غير معرف

ii) $(4,2),(1,2)$ — $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-2}{1-4}$$

$$m=\frac{0}{-3}=0$$

i) $(-2,1),(6,7)$ — $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{7-1}{6-(-2)}$$

$$m=\frac{6}{6+2}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

مثال جد المقطع السيني والصادي للمعادلة : $4x-3y=12$

الحل :

المقطع الصادي

$4x-3y=12$ المعادلة

$x=0\Rightarrow 4(0)-3y=12$

$-3y=12\Rightarrow y=\frac{12}{-3}=-4$

∴ نقطة التقاطع $(0,-4)$

المقطع السيني

$4x-3y=12$ المعادلة

$y=0\Rightarrow 4x-3(0)=12$

$4x=12\Rightarrow x=\frac{12}{4}=3$

∴ نقطة التقاطع $(3,0)$

تدريب 2 جد المقطع السيني والصادي لكل معادلة مما يأتي :

i) $2x-y=-4$

الحل :

المقطع الصادي

$2x-y=-4$ المعادلة

$x=0\Rightarrow 2(0)-y=-4$

$-y=-4\Rightarrow y=4$

∴ نقطة التقاطع $(0,4)$

المقطع السيني

$2x-y=-4$ المعادلة

$y=0\Rightarrow 2x-0=-4$

$2x=-4\Rightarrow x=\frac{-4}{2}=-2$

∴ نقطة التقاطع $(-2,0)$

ii) $y=-5$

الحل : $y=-5$ المقطع الصادي ⟸ نقطة التقاطع $(0,-5)$

$x=0$ المقطع السيني ⟸ نقطة التقاطع $(0,0)$

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

iii) $x = -5$

الحل: $y = 0$ المقطع الصادي ⟸ نقطة التقاطع $(0, 0)$

$x = -5$ المقطع السيني ⟸ نقطة التقاطع $(-5, 0)$

معادلة المستقيم



جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين : $\overset{(x_1,y_1)}{(-3, 2)}, \overset{(x_2,y_2)}{(3, 1)}$

الحل:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 2}{x - (-3)} = \frac{1 - 2}{3 - (-3)} \Rightarrow \frac{y - 2}{x + 3} = \frac{-1}{6}$$ الطرفين في الوسطين

$$6y - 12 = -x - 3 \Rightarrow 6y + x = -3 + 12 \Rightarrow x + 6y = 9$$ معادلة المستقيم



جد معادلة المستقيم الذي ميله (-3) ويمر بالنقطة $(-1, 1)$

الحل:

$m = -3$, $\overset{(x_1,y_1)}{(-1, 1)}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ بالتعويض الميل – النقطة

$$y - 1 = -3(x - (-1)) \Rightarrow y - 1 = -3(x + 1) \Rightarrow y - 1 = -3x - 3$$

$$y + 3x = -3 + 1 \Rightarrow 3x + y = -2$$ معادلة المستقيم



جد الميل والمقطع الصادي للمستقيم الذي معادلته $5x - 3y = 15$

الحل:

$3y = 5x - 15 \} \div 3$

$y = \frac{5}{3}x - 5$

$y = mx + k$

$m = \frac{5}{3}$, $k = -5$ المقطع الصادي



جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين : $(3,4), (-2,1)$

$(x_1,y_1), (x_2,y_2)$

الحل :

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-4}{x-3}=\frac{1-4}{-2-3} \Rightarrow \frac{y-4}{x-3}=\frac{-3}{-5} \Rightarrow \frac{y-4}{x-3}=\frac{3}{5}$$ الطرفين في الوسطين

$$3x-9=5y-20 \Rightarrow 3x-5y=-20+9 \Rightarrow 3x-5y=-11$$ معادلة المستقيم

تدريب2

جد معادلة المستقيم الذي ميله $\left(\frac{-1}{3}\right)$ ومقطعه السيني يساوي (7)

الحل :

$$m=\frac{-1}{3}\ , \quad x=7 \Rightarrow \underset{(7,0)}{(x_1,y_1)},$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$ بالتعويض الميل – النقطة

$$y-0=\frac{-1}{3}(x-7) \Rightarrow y=\frac{-1}{3}(x-7) \Rightarrow 3y=-x+7$$

$$x+3y=7$$ معادلة المستقيم

تدريب3

جد الميل والمقطع الصادي للمستقيم الذي معادلته : $2x-4y=8$

الحل :

$$4y=2x-8\ \}\div 4 \Rightarrow y=\frac{2}{4}x-2$$

$$y=\frac{1}{2}x-2$$

$$y=mx+k$$

$$m=\frac{1}{2}\ , \quad k=-2$$ المقطع الصادي

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

المستقيمات المتوازية والمتعامدة



جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(2,5)$

i) الموازي للمستقيم المار بالنقطتين $\overset{(x_1,y_1)}{(1,3)}, \overset{(x_2,y_2)}{(3,-1)}$

ii) العمودي للمستقيم المار بالنقطتين $(1,3), (3,-1)$

الحل :

$$i)\ m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-3}{3-1} = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow m_1 = -2 \ , \quad \overset{(x_1,y_1)}{(2,5)}$$

$y - y_1 = m_1(x - x_1)$ بالتعويض الميل – النقطة

$$y - 5 = -2(x-2) \Rightarrow y - 5 = -2x + 4 \Longrightarrow y = -2x + 4 + 5$$

$y = -2x + 9$ معادلة المستقيم

$ii)\ m_1 = -2 \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$ تعامد , $\overset{(x_1,y_1)}{(2,5)}$

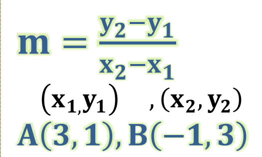
$y - y_1 = m_2(x - x_1)$ بالتعويض الميل – النقطة

$$y - 5 = \frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow 2y - 10 = x - 2 \Rightarrow 2y = x - 2 + 10 \Rightarrow 2y = x + 8 \} \div 2$$

$y = \frac{1}{2}x + 4$ معادلة المستقيم

تدريب1 برهن أن الشكل ABCD الذي رؤوسه : $A(3,1), B(-1,3), C(-3,-1), D(1,-3)$ متوازي الاضلاع .

الحل :



$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\overset{(x_1,y_1)}{A(3,1)}, \overset{(x_2,y_2)}{B(-1,3)}$

$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{3-1}{-1-3} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

$\overset{(x_1,y_1)}{A(3,1)}, \overset{(x_2,y_2)}{D(1,-3)}$

$m\overleftrightarrow{AD} = \frac{-3-1}{1-3} = \frac{-4}{-2} = 2$

$\overset{(x_1,y_1)}{C(-3,-1)}, \overset{(x_2,y_2)}{D(1,-3)}$

$m\overleftrightarrow{CD} = \frac{-3-(-1)}{1-(-3)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

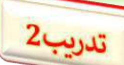
$\overset{(x_1,y_1)}{B(-1,3)}, \overset{(x_2,y_2)}{C(-3,-1)}$

$m\overleftrightarrow{BC} = \frac{-1-3}{-3-(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$

$\because m\overleftrightarrow{AB} = m\overleftrightarrow{CD} = -\frac{1}{2} \quad , \quad m\overleftrightarrow{AD} = m\overleftrightarrow{BC} = 2 \Rightarrow$ $\therefore$ الشكل ABCD متوازي الاضلاع

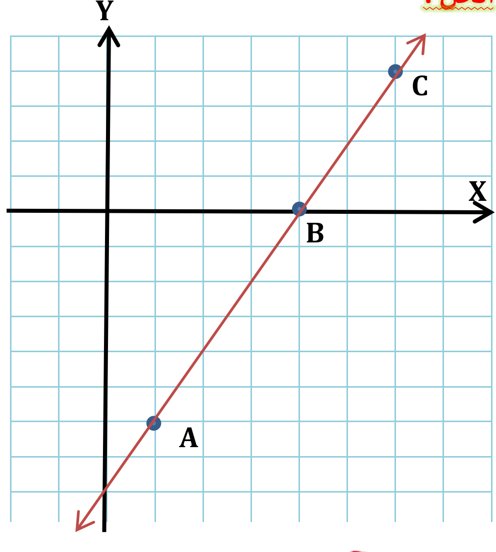


اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998



بين أن النقط : $A(1,-6), B(4,0), C(6,4)$ تقع على استقامة واحدة .

الحل :



$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$(x_1,y_1) \quad ,(x_2,y_2)$

$A(1,-6), B(4,0)$

$$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{0-(-6)}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$$

$(x_1,y_1) \quad ,(x_2,y_2)$

$B(4,0), C(6,4)$

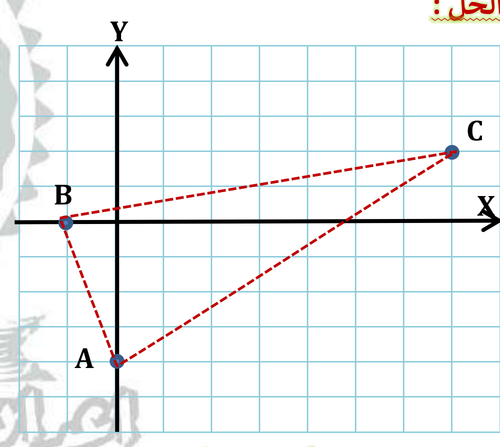
$$m\overleftrightarrow{BC} = \frac{4-0}{6-4} = \frac{4}{2} = 2$$

$\because m\overleftrightarrow{AB} = m\overleftrightarrow{BC} = 2 \implies$ $\therefore$ النقط ABC تقع على استقامة واحدة

تدريب3

بين أن المثلث الذي رؤوسه : $A(0,-4), B(-1,0), C(7,2)$ مثلث قائم الزاوية .

الحل :



$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$(x_1,y_1) \quad ,(x_2,y_2)$

$A(0,-4), B(-1,0)$

$$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{0-(-4)}{-1-0} = \frac{4}{-1} = -4$$

$(x_1,y_1) \quad ,(x_2,y_2)$

$B(-1,0), C(7,2)$

$$m\overleftrightarrow{BC} = \frac{2-0}{7-(-1)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$\because m\overleftrightarrow{AB} \times m\overleftrightarrow{BC} = -4 \times \frac{1}{4} = -1$

$\therefore$ المثلث ABC قائم الزاوية .

المسافة بين نقطتين



اثبت أن النقاط : $A(-3,4), B(3,2), C(0,3)$ على استقامة واحدة باستعمال قانون المسافة .

الحل :

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

$(x_1,y_1) \quad ,(x_2,y_2)$

$A(-3,4), B(3,2)$

$$AB = \sqrt{(3+3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{(6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$



$B(3,2), C(0,3)$
$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$

$BC=\sqrt{(0-3)^2+(3-2)^2}=\sqrt{(-3)^2+(1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$
$A(-3,4), C(0,3)$

$AC=\sqrt{(0+3)^2+(3-4)^2}=\sqrt{(3)^2+(-1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

$\therefore AB=AC+BC=\sqrt{10}+\sqrt{10}=2\sqrt{10}$

∴ النقاط ABC على استقامة واحدة



جد نقطة منتصف للقطعة المستقيمة AB حيث : $A(-2,0), B(4,5)$ ، $(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$

الحل :

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{-2+4}{2},\frac{0+5}{2}\right)=\left(\frac{2}{2},\frac{5}{2}\right)=\left(1,\frac{5}{2}\right)$$

تدريب 2

هل النقط : $A(0,1), B(3,-1), C(-2,-2)$ تمثل رؤوس مثلث قائم الزاوية .

الحل :

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$
$A(0,1), B(3,-1)$

$AB=\sqrt{(3-0)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{(3)^2+(-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$
$B(3,-1), C(-2,-2)$

$BC=\sqrt{(-2-3)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{(-5)^2+(-1)^2}=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$

$(x_1,y_1)\ ,(x_2,y_2)$
$A(0,1), C(-2,-2)$

$AC=\sqrt{(-2-0)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

$(BC)^2=(AB)^2+(AC)^2$ مبرهنة فيثاغورس

$(\sqrt{26})^2=(\sqrt{13})^2+(\sqrt{13})^2 \Rightarrow 26=13+13=26 \Rightarrow$ ∴ المثلث قائم الزاوية

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998

تدريب 3 باستعمال قانون المسافة بين هل النقط : $A(-1,-3), B(-6,1), C(-3,3)$ تقع على استقامة واحدة .

الحل :

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$A\overset{(x_1,y_1)}{(-1,-3)}, B\overset{(x_2,y_2)}{(-6,1)}$

$$AB=\sqrt{(-6+1)^2+(1+3)^2}=\sqrt{(-5)^2+(4)^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$$

$B\overset{(x_1,y_1)}{(-6,1)}, C\overset{(x_2,y_2)}{(-3,3)}$

$$BC=\sqrt{(-3+6)^2+(3-1)^2}=\sqrt{(3)^2+(2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

$A\overset{(x_1,y_1)}{(-1,-3)}, C\overset{(x_2,y_2)}{(-3,3)}$

$$AC=\sqrt{(-3+1)^2+(3+3)^2}=\sqrt{(-2)^2+(6)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}$$

$$AB\neq BC+AC$$

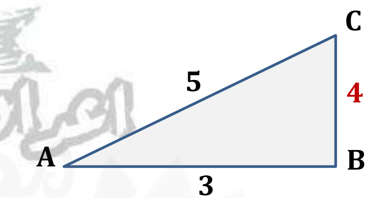
النقط ABC ليست على استقامة واحدة

النسب المثلثية



المثلث ABC قائم الزاوية في B اذا كانت $\cos A=\frac{3}{5}$ جد : ii) $\tan C$ i) $\sin A$

الحل :



$$\cos A=\frac{3}{5}=\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$(AC)^2=(AB)^2+(BC)^2$ مبرهنة فيثاغورس

$$(5)^2=(3)^2+(BC)^2 \Rightarrow 25=9+(BC)^2 \Rightarrow (BC)^2=25-9=16 \Rightarrow BC=\sqrt{16}=4$$



i) $\sin A=\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}=\frac{4}{5}$ ii) $\tan C=\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}=\frac{4}{3}$

مثال جد القيمة العددية للمقدار : $(\sin 60^\circ)^2(\tan 45^\circ)+(\sin 30^\circ)^2$

الحل : من الجدول :

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين

07703153998

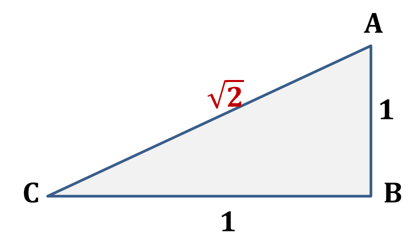
$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 45^\circ = 1$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$$(\sin 60^\circ)^2(\tan 45^\circ) + (\sin 30^\circ)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2(1) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

تدريب 1 المثلث ABC قائم الزاوية في B اذا كانت : $\tan C = 1$ جد :

i) $\cot C$ ii) $\sin C$ iii) $\sec A$ iv) $\cos C$ v) $\cos A$

الحل :



$\tan C = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{1}{1}$

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ مبرهنة فيثاغورس

$(AC)^2 = (1)^2 + (1)^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}$

i) $\cot C = \frac{1}{\tan C} = \frac{1}{1} = 1$ ii) $\sin C = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

iii) $\cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$

iv) $\cos C = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ v) $\cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

تدريب 2 جد القيمة العددية للمقدار : $(\tan 60^\circ)^2 + (\cot 45^\circ)^2 + (\sec 30^\circ)^2 + (\sin 45^\circ)^2$

الحل : من الجدول :

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, $\cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = \frac{1}{1} = 1$, $\sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$= (\sqrt{3})^2 + (1)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 3 + 1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = 4 + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{24+8+3}{6} = \frac{35}{6}$$

تدريب 3 اثبت أن :

i) $(\csc 30^\circ)^2 + (\cot 30^\circ)^2 = 7$

الحل : من الجدول :

$\csc 30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \quad , \quad \cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$

الطرف الايسر $= (\csc 30^\circ)^2 + (\cot 30^\circ)^2$

$= (2)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4 + 3 = 7$ الطرف الايمن

---

ii) $2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ = \sin 90^\circ$

الحل : من الجدول :

$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin 90^\circ = 1$ الطرف الايمن

$2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{2} = 1$

$\therefore$ الطرف الايمن = الطرف الايسر

iii) $(\cos 60^\circ)^2 - (\sin 60^\circ)^2 = -\frac{1}{2}$

الحل : من الجدول :

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$(\cos 60^\circ)^2 - (\sin 60^\circ)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ الطرف الايمن

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998

صفحة 35



1 مثل المعادلات التالية في المستوي الاحداثي .

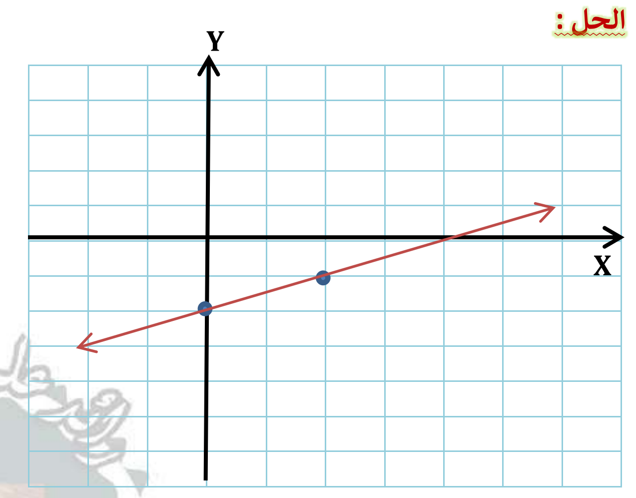
i) $2x - 4y = 8$

الحل :

$4y = 2x - 8 \} \div 4$

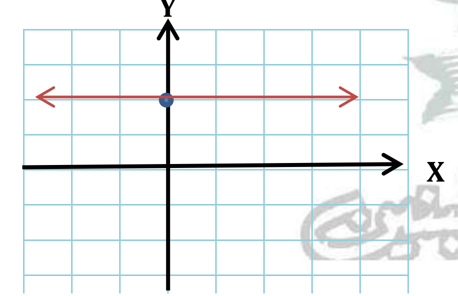
$y = \frac{2}{4}x - 2 \implies y = \frac{1}{2}x - 2$

x	$y = \frac{1}{2}x - 2$	(x, y)
0	$\frac{1}{2}(0) - 2 = 0 - 2 = -2$	(0, −2)
2	$\frac{1}{2}(2) - 2 = 1 - 2 = -1$	(2, −1)



المستقيم يقطع محور السينات والصادات ولا يمر بنقطة الاصل

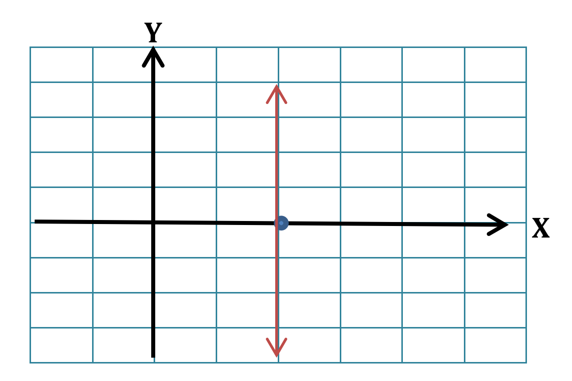
ii) $y = 2$



الحل :

المستقيم يوازي محور السينات وعمودي على محور الصادات عن (0, 2)

iii) $x = 2$



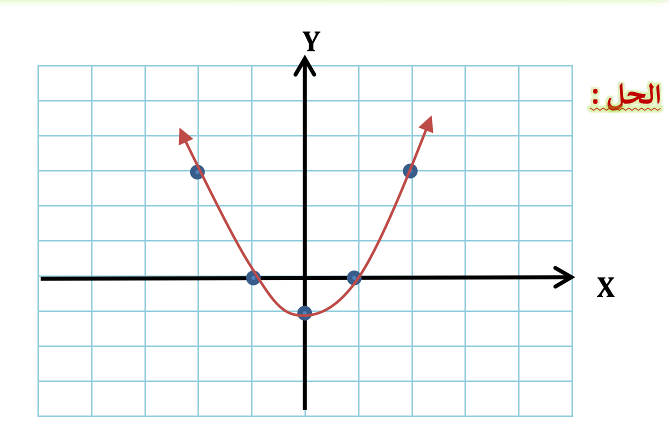
الحل :

المستقيم يوازي محور الصادات وعمودي على محور السينات عند (2, 0)

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

iv) $y = x^2 - 1$

الحل :



x	$y = x^2 - 1$	(x, y)
0	$(0)^2 - 1 = 0 - 1 = -1$	$(0, -1)$
1	$(1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$	$(1, 0)$
2	$(2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$	$(2, 3)$
−1	$(-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$	$(-1, 0)$
−2	$(-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$	$(-2, 3)$

2 جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين : $A(-2, -3), B(2, 3)$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

الحل :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - (-3)}{x - (-2)} = \frac{3 - (-3)}{2 - (-2)} \Rightarrow \frac{y + 3}{x + 2} = \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{y + 3}{x + 2} = \frac{3}{2}$$ الطرفين في الوسطين

$$3x + 6 = 2y + 6 \Rightarrow 3x - 3y = 6 - 6 \Rightarrow 3x - 3y = 0$$ معادلة المستقيم

3 جد المقطع السيني والصادي للمعادلة الآتية : $y - x = 4$

الحل :

المقطع الصادي	المقطع السيني
$y - x = 4$ المعادلة	$y - x = 4$ المعادلة
$x = 0 \Rightarrow y - 0 = 4$	$y = 0 \Rightarrow 0 - x = 4$
$y = 4$	$-x = 4 \Rightarrow x = -4$
∴ نقطة التقاطع هي : $(0, 4)$	∴ نقطة التقاطع هي : $(-4, 0)$

4 جد معادلة المستقيم لكل مما يأتي :

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

i) يمر بالنقطتين : $(3, -2), (1, 5)$

الحل :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$\frac{y-(-2)}{x-3}=\frac{5-(-2)}{1-3} \Rightarrow \frac{y+2}{x-3}=\frac{7}{-2}$ الطرفين في الوسطين

$7x-21=-2y-4 \Rightarrow 7x+2y=-4+21 \Rightarrow 7x+2y=17$ معادلة المستقيم

ii) ميله $\frac{3}{2}$ ومقطعه الصادي يساوي (-5)

الحل :

$m=\frac{3}{2}$, $y=-5 \Rightarrow \underset{(0,-5)}{(x_1,y_1)}$

$y-y_1=m(x-x_1)$ بالتعويض الميل – النقطة

$y-(-5)=\frac{3}{2}(x-0) \Rightarrow y+5=\frac{3}{2}x \Rightarrow y=\frac{3}{2}x-5$ معادلة المستقيم

iii) ميله $-\frac{1}{5}$ ومقطعه السيني يساوي (3)

الحل :

$m=-\frac{1}{5}$, $x=3 \Rightarrow \underset{(3,0)}{(x_1,y_1)}$

$y-y_1=m(x-x_1)$ بالتعويض الميل – النقطة

$y-0=\frac{-1}{5}(x-3) \Rightarrow y=\frac{-1}{5}(x-3) \Rightarrow 5y=-x+3 \Rightarrow x+5y=3$ معادلة المستقيم

5 استعمل معادلة الميل والنقطة لتحديد ميل المستقيم واحدى نقاطه : $2y-3x=8$

الحل :

$2y-8=3x\ \}\div 2 \Rightarrow y-4=\frac{3}{2}x$

$y-4=\frac{3}{2}(x-0)$

$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow m=\frac{3}{2}$, $(x_1,y_1)=(0,4)$

6 باستعمال الميل بين ما يأتي :

i) النقاط : $A(3,2), B(0,-1), C(1,0)$ على استقامة واحدة .

الحل :

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$A(3,2), B(0,-1)$

$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{-1-2}{0-3} = \frac{-3}{-3} = 1$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$B(0,-1), C(1,0)$

$m\overleftrightarrow{BC} = \frac{0+1}{1-0} = \frac{1}{1} = 1$

$\because m\overleftrightarrow{AB} = m\overleftrightarrow{BC} = 1 \implies$ ∴ النقاط ABC تقع على استقامة واحدة

ii) النقاط التالية رؤوس لمتوازي الاضلاع $A(4,-1), B(2,2), C(-2,4), D(0,1)$

الحل :

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$A(4,-1), B(2,2)$

$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{2+1}{2-4} = -\frac{3}{2}$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$C(-2,4), D(0,1)$

$m\overleftrightarrow{CD} = \frac{1-4}{0+2} = -\frac{3}{2}$

$m\overleftrightarrow{AB} = m\overleftrightarrow{CD} = -\frac{3}{2}$

$A(4,-1), D(0,1)$

$m\overleftrightarrow{AD} = \frac{1+1}{0-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

$B(2,2), C(-2,4)$

$m\overleftrightarrow{BC} = \frac{4-2}{-2-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

$m\overleftrightarrow{AD} = m\overleftrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}$

∴ الشكل ABCD رؤوس متوازي الاضلاع .

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

iii) المستقيم المار بالنقطتين $A(3,1), B(4,-1)$ عمودي على المستقيم المار بالنقطتين $C(4,-1), D(0,-3)$

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

الحل :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{-1-1}{4-3} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$m\overleftrightarrow{CD} = \frac{-3+1}{0-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$m\overleftrightarrow{AB} \times m\overleftrightarrow{CD} = -2 \times \frac{1}{2} = -1$$

7 جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(0,3)$ والموازي للمستقيم الذي ميله $\frac{-2}{3}$

الحل :

$m = \frac{-2}{3}$, $\underset{(0,3)}{(x_1,y_1)}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ بالتعويض الميل – النقطة

$y - 3 = \frac{-2}{3}(x-0) \Rightarrow y - 3 = \frac{-2}{3}x \Rightarrow y = \frac{-2}{3}x + 3$ معادلة المستقيم

8 باستعمال قانون المسافة بين نقطتين اثبت i) , ii) في السؤال 6

i) النقاط : $A(3,2), B(0,-1), C(1,0)$ على استقامة واحدة .

الحل :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$\underset{(x_1,y_1),(x_2,y_2)}{A(3,2), B(0,-1)} \Rightarrow AB = \sqrt{(0-3)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\underset{(x_1,y_1),(x_2,y_2)}{B(0,-1), C(1,0)} \Rightarrow BC = \sqrt{(1-0)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\underset{(x_1,y_1),(x_2,y_2)}{A(3,2), C(1,0)} \Rightarrow AC = \sqrt{(1-3)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$AB = BC + AC = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow$ النقاط ABC تقع على استقامة واحدة

ii) النقاط التالية رؤوس لمتوازي الاضلاع $A(4,-1), B(2,2), C(-2,4), D(0,1)$

الحل :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$A(4,-1), B(2,2) \Rightarrow AB = \sqrt{(2-4)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$B(2,2), C(-2,4) \Rightarrow BC = \sqrt{(-2-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$C(-2,4), D(0,1) \Rightarrow CD = \sqrt{(0+2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$A(4,-1), D(0,1) \Rightarrow AD = \sqrt{(0-4)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

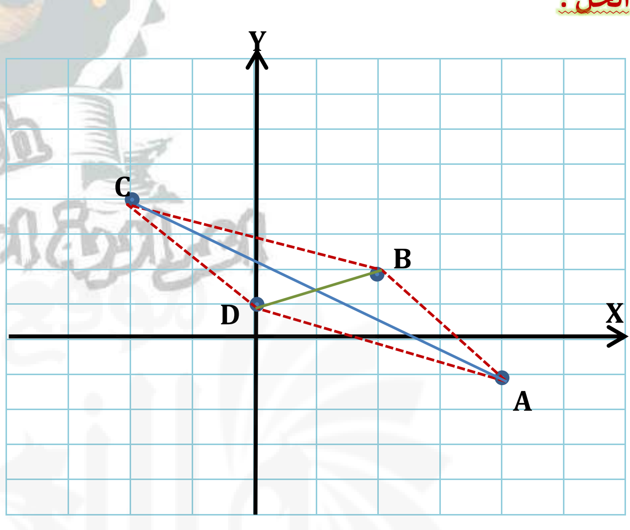
$\because AB = CD = \sqrt{13} \quad , \quad BC = AD = 2\sqrt{5}$

∴ الشكل ABCD رؤوس متوازي الاضلاع .

9 باستعمال قانون نقطة المنتصف اثبت الفرع (ii في السؤال 6

ii) النقاط التالية رؤوس لمتوازي الاضلاع $A(4,-1), B(2,2), C(-2,4), D(0,1)$

الحل :



$A(4,-1), C(-2,4)$

$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$M = \left(\frac{4-2}{2}, \frac{-1+4}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$

$B(2,2), D(0,1)$

$M_1 = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$

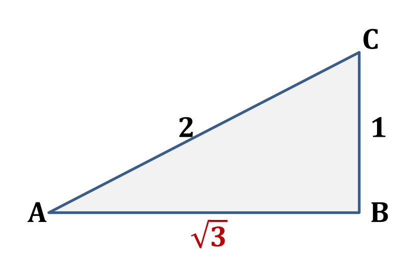
$M = M_1 \Rightarrow$ الشكل $ABCD$ رؤوس توازي الاضلاع

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998

10 في المثلث ABC القائم الزاوية في B اذا كانت $\sin A = \frac{1}{2}$: جد :

$i)\ \cos A \quad ii)\ \tan A \quad iii)\ \cot C \quad iv)\ \sec A$

الحل :



$\sin A = \frac{1}{2} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$ مبرهنة فيثاغورس

$(2)^2 = (1)^2 + (AB)^2 \quad \Rightarrow = 4 = 1 + (AB)^2$

$(AB)^2 = 4 - 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad AB = \sqrt{3}$



$i)\ \cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad ii)\ \tan A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

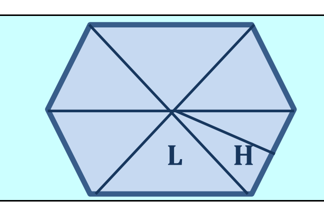
$iii)\ \tan C = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \cot C = \frac{1}{\tan C} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$iv)\ \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

الفصل الخامس // الهندسة والقياس

المضلعات والمجسمات (الهرم والمخروط)

المضلعات المنتظمة

محيط المضلع المنتظم = عدد الاضلاع × طول الضلع	$p = n \times L$	
مساحة المضلع المنتظم = مساحة المثلث × عدد اضلاعه	$S = \frac{1}{2} L \times H \times n$	

طول الضلع L والعامد أو الارتفاع H يمكن حساب مساحة المثلث .

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع (العامد) $\Leftarrow$ $A = \frac{1}{2} L \times H$

مثال جد محيط ومساحة الشكل السداسي المنتظم طول ضلعه 4m وطول العامد 3m

الحل :

$n = 6 \ , \ L = 4m \ , \ H = 3m$

المحيط $p = n \times L \Rightarrow P = 6 \times 4 = 24 \text{ m}$

المساحة $S = \frac{1}{2} L \times H \times n \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times 6 = 36 \text{ m}^2$



جد مساحة المربع الذي طول العامد فيه 4cm

الحل :

$n = 4 \ , \ H = 3m$

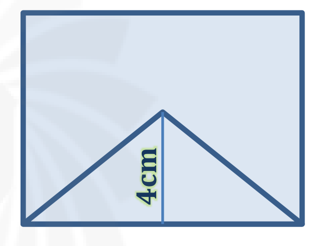
الطريقة الأولى

طول الضلع $L = 4 \times 2 = 8 \ cm$

مساحة المضلع المنتظم $S = \frac{1}{2} L \times H \times n$

$S = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 \times 4 = 64 \text{ cm}^2$

الطريقة الثانية



مساحة المربع $A = L \times L$

$A = 8 \times 8 = 64 \text{ cm}^2$

الهرم والمخروط

الهرم : هو مجسم له على الاقل ثلاث اوجه مثلثة الشكل وله قاعدة واحدة عبارة عن شكل مضلع (شكل القاعدة يحدد شكل الهرم) .

h = الارتفاع

H = العامد

l = الارتفاع الجانبي

$l^2 = h^2 + H^2$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

المخروط : هو مجسم له قاعدة واحدة فقط عبارة عن دائرة وله رأس واحد .

L = الارتفاع الجانبي

h = الارتفاع

r = نصف القطر

$L^2 = h^2 + r^2$

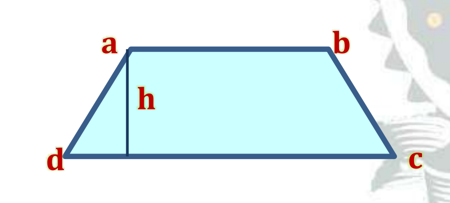
المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

قانون المساحة للهرم المنتظم والمخروط الدائري القائم		
	الهرم المنتظم	المخروط الدائري
المساحة الجانبية	$LA = \frac{1}{2} P \times l$	$LA = 2\pi r \times l$
المساحة الكلية	$TA = \frac{1}{2} P \times l + B$	$TA = 2\pi r \times l + \pi r^2$

قانون الحجم في الهرم والمخروط	
حجم الهرم	$V = \frac{1}{3} B \times h$
حجم المخروط	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$

مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ مجموع القاعدتين × الارتفاع

$$B = \frac{1}{2}(ab + cd) \times h$$



مثال جد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لهرم منتظم ارتفاعه الجانبي 8cm وقاعدته مربعة طول ضلعها 3cm

الحل : $l = 8cm \; , L = 3cm$

محيط المربع $p = 4 \times L = 4 \times 3 = 12cm$ ⟸ المساحة الجانبية $LA = \frac{1}{2} P \times l$

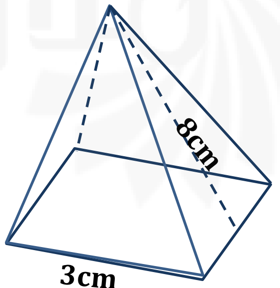


$LA = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48cm^2$

المساحة الكلية $TA = \frac{1}{2} P \times l + B$

مساحة المربع $B = L \times L = 3 \times 3 = 9cm^2$

$TA = 48 + 9 = 57cm^2$



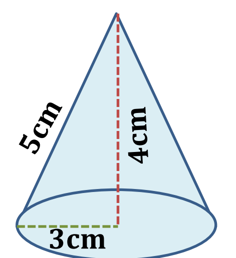


مثال استخدم الشكل المجاور لإيجاد :

i) الساحة الجانبية .

ii) المساحة الكلية .

iii) الحجم .



الحل : الشكل اعلاه يمثل مخروط دائري قائم : $r = 3cm , h = 4cm \ , l = 5cm$

i) $LA = 2\pi r \times l$ المساحة الجانبية

$LA = 2 \times 3.14 \times 3 \times 5 = 94.2 \ cm^2$

ii) $TA = 2\pi r \times l + \pi r^2$ المساحة الكلية

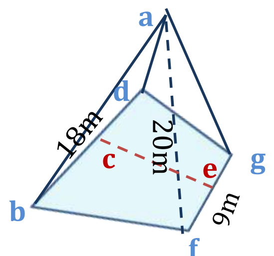
$TA = 2 \times 3.14 \times 3 + 3.14 \times (3)^2 = 94.2 + 28.26 = 122.46 \ cm^2$

i) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h$ الحجم

$V = \frac{1}{3} \times 3.14 \times (3)^2 \times 4 = \frac{113.04}{3} = 37.68 \ cm^3$



مثال جد حجم الهرم المجاور :

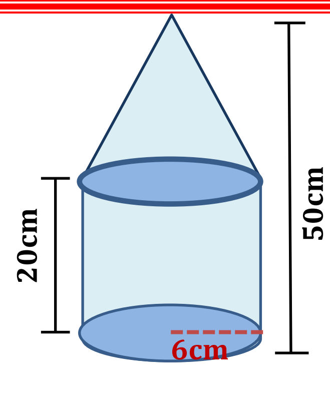


الحل : القاعدة شبه منحرف

$B = \frac{1}{2}(gf + bd) \times ce = \frac{1}{2}(9 + 18) \times 6 = 27 \times 3 = 81m^2$ مساحة شبه المنحرف

$V = \frac{1}{3}B \times h = \frac{1}{3} \times 81 \times 20 = 27 \times 20 = 540m^3$ الحجم

مثال جد حجم الجسم المركب المجاور : لإيجاد حجم الجسم المركب .



الحل : نجد أولا حجم الاسطوانة والمخروط وبعد ذلك نجمع الحجوم لنجد حجم الجسم المركب .

حجم المخروط :

$r = 6cm , h = 50 - 20 = 30cm$

$V_2 = \frac{1}{3}r^2\pi \times h = \frac{1}{3} \times (6)^2\pi \times 30 = 360\pi cm^3$



حجم الاسطوانة :

$r = 6cm , h = 20cm$

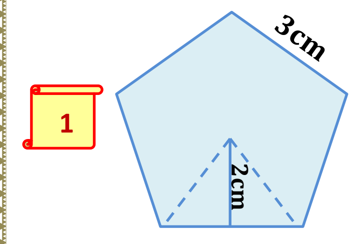
$V_1 = r^2 h\pi = (6)^2 \times 20\pi$

$= 720\pi \ cm^3$

$V = V_1 + V_2 = 720\pi + 360\pi = 1080\pi \ cm^2$ حجم الجسم المركب

تأكد من فهمك جد محيط ومساحة كل مضلع منتظم :

1



الحل : $n = 5cm\ , L = 3cm\ , H = 2cm$

المحيط $P = n \times L = 5 \times 3 = 15cm^2$

المساحة $A = \frac{1}{2} L \times H \times n = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times 5 = 15cm^2$

2

3cm

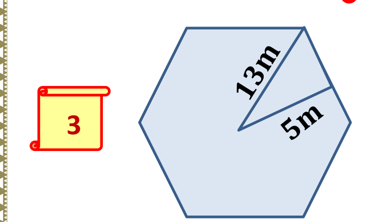
$2\sqrt{3}$cm

الحل : $n = 7cm\ , L = 3cm\ , H = 2\sqrt{3}cm$

المحيط $P = n \times L = 7 \times 3 = 21cm^2$

المساحة $A = \frac{1}{2} L \times H \times n = \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{3} \times 7 = 21\sqrt{3}cm^2$

3



الحل : $n = 6m\ , L = ?\ , H = 5m$

مبرهنة فيثاغورس $(13)^2 = (5)^2 + (x)^2$

$169 = 25 + x^2 \Rightarrow x^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow x = \sqrt{144} = 12m$

$L = 2x = 2(12) = 24m$

المحيط $P = n \times L = 6 \times 24 = 144m^2$

المساحة $A = \frac{1}{2} L \times H \times n = \frac{1}{2} \times 24 \times 5 \times 6 = 360m^2$

4 جد الحجم والمساحة الجانبية والكلية لكل مما يأتي :

i) مخروط دائري قائم : مساحة قاعدته $225\pi cm^2$, محيط قاعدته $30\pi cm$, ارتفاعه $20cm$, ارتفاعه الجانبي $25cm$.

الحل : $B = 225\pi cm^2\ , P = 30\pi cm\ , h = 20cm\ , l = 25cm$

المساحة الجانبية $LA = 2\pi r \times l$

$LA = 2\pi \times 15 \times 25 = 750\pi cm^2$

المساحة الكلية $TA = 2\pi r \times l + \pi r^2$

$TA = 750\pi + 225\pi = 975\pi cm^2$

$l^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow (25)^2 = (20)^2 + r^2$

$625 = 400 + r^2 \Rightarrow r^2 = 625 - 400 = 225$

$r = \sqrt{225} = 15cm$

الحجم $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h = \frac{1}{3}\pi \times 225 \times 20 = 1500\pi\ cm^3$

ii) هرم : مساحة قاعدته $54\sqrt{3}\ cm^2$, محيط قاعدته $36cm$, ارتفاعه $3\sqrt{6}\ cm$, ارتفاعه الجانبي $9cm$.

الحل : $B = 54\sqrt{3}cm^2\ , P = 36cm\ \ , h = 3\sqrt{6}cm\ , l = 9cm$

الحجم $V = \frac{1}{3}B \times h = \frac{1}{3} \times 54\sqrt{3}\ \times 3\sqrt{6} = 54\sqrt{18} = 54 \times 3\sqrt{2} = 108\sqrt{2}\ cm^3$

المساحة الجانبية $LA = \frac{1}{2}P \times l = \frac{1}{2} \times 36 \times 9 = 162cm^2$

المساحة الكلية $TA = \frac{1}{2}P \times l + B = 162 + 54\sqrt{3} = 162 + 54(1.7) = 162 + 91.8 = 253.8cm^2$

5 جد الحجم والمساحة الجانبية والكلية لكل مما يأتي :

i) مخروط دائري قائم : نصف قطر قاعدته $7cm$ وارتفاعه $\sqrt{51}\ cm$ وارتفاعه الجانبي $10cm$

الحل : $r = 7cm\ ,\ h = \sqrt{51}cm\ , l = 10cm$

الحجم $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h = \frac{1}{3}\pi \times (7)^2 \times \sqrt{51} = \frac{49\sqrt{51}}{3}\pi\ cm^3$

المساحة الجانبية $LA = 2\pi r \times l = 2\pi \times 7 \times 10 = 140\pi cm^2$

المساحة الكلية $TA = 2\pi r \times l + \pi r^2 = 140\pi + (7)^2\pi = 140\pi + 49\pi = 189\pi cm^2$

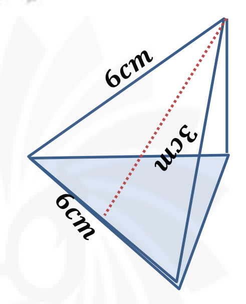
ii) هرم قاعدته مثلث منتظم طول ضلعه $6cm$ وارتفاعه $3cm$ وارتفاعه الجانبي $6cm$

الحل : $L = 6cm\ ,\ h = 3cm\ , l = 6cm$

مساحة المثلث $B = \frac{1}{2}L \times h = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9cm^2$

الحجم $V = \frac{1}{3}B \times h = \frac{1}{3} \times 9 \times 3 = 9cm^3$

محيط المثلث $P = L + h + l = 6 + 3 + 6 = 15cm$

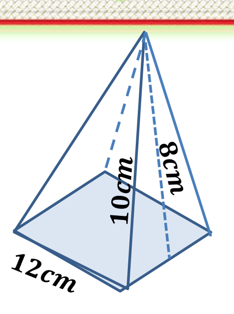


المساحة الجانبية $LA = \frac{1}{2}P \times l = \frac{1}{2} \times 15 \times 6 = 45cm^2$

المساحة الكلية $TA = \frac{1}{2}P \times l + B = 45 + 9 = 54cm^2$

iii) هرم قاعدته مربعة طول ضلعها $12cm$ وارتفاعه $8cm$ وارتفاعه الجانبي $10cm$

الحل : $L = 12cm\ ,\ h = 8cm\ , l = 10cm$



$B = L \times L = 12 \times 12 = 144cm^2$ مساحة المربع

$V = \frac{1}{3}B \times h = \frac{1}{3} \times 144 \times 8 = 48 \times 8 = 384cm^3$ الحجم

$p = 4 \times L = 4 \times 12 = 48cm$ محيط المربع

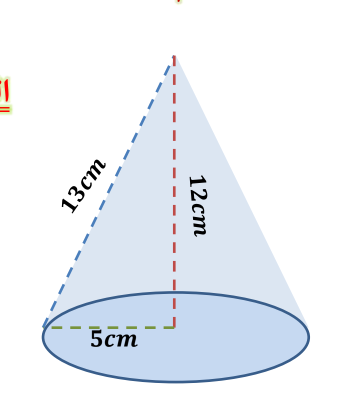
$LA = \frac{1}{2}P \times l = \frac{1}{2} \times 48 \times 10 = 240cm^2$ المساحة الجانبية

$TA = \frac{1}{2}P \times l + B = 240 + 144 = 384cm^2$ المساحة الكلية

---

6 جد الحجم والمساحة الجانبية والكلية مستعملا الاشكال ادناه :

(i



الحل : $l = 13cm \ , \ h = 12cm \ , r = 5cm$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h = \frac{1}{3}\pi \times (5)^2 \times 12 = 100\pi \ cm^3$ الحجم

$LA = 2\pi r \times l = 2\pi \times 5 \times 13 = 130\pi cm^2$ المساحة الجانبية

$TA = 2\pi r \times l + \pi r^2 = 130\pi + 25\pi = 155\pi cm^2$ المساحة الكلية

(ii

الحل : $l = ? \ , \ h = 4cm \ , r = 3cm$

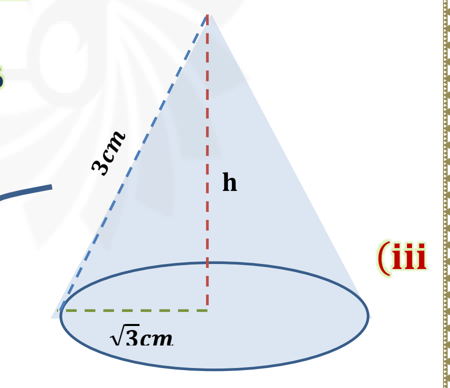
$l^2 = h^2 + r^2 = (4)^2 + (3)^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow l = 5cm$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h = \frac{1}{3}\pi \times 9 \times 4 = 12cm^3$ الحجم

$LA = 2\pi r \times l = 2\pi \times 3 \times 5 = 30\pi cm^2$ المساحة الجانبية

$TA = 2\pi r \times l + \pi r^2 = 30\pi + 9\pi = 39\pi cm^2$ المساحة الكلية

(iii



الحل : $l = 3cm \ , \ h = ? \ , r = \sqrt{3}cm$

$l^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow (3)^2 = h^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 9 = h^2 + 3 \Rightarrow h^2 = 9 - 3 = 6$

$h = \sqrt{6} \ cm$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h = \frac{1}{3}\pi \times 3 \times \sqrt{6} = \sqrt{6}cm^3$ الحجم

$LA = 2\pi r \times l = 2\pi \times \sqrt{3} \times 3 = 6\sqrt{3} = 6(1.7)$

$= 10.2 \ \pi cm^2$ المساحة الجانبية

$TA = 2\pi r \times l + \pi r^2 = 10.2\pi + 3\pi = 13.2\pi cm^2$ المساحة الكلية

7 جد الحجم والمساحة الجانبية والكلية لكل مما يأتي مستعملا الاشكال ادناه :

i)

5cm
3cm
8cm
قاعدة مربعة

الحل : $l = 5cm \;,\; h = 3cm \,, L = 8cm$

$B = L \times L = 8 \times 8 = 64cm^2$ مساحة المربع

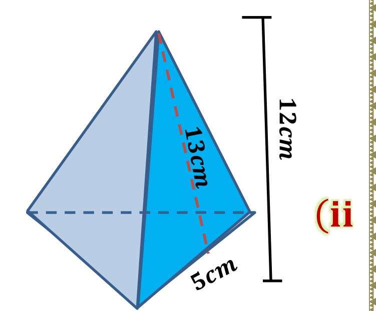
$V = \frac{1}{3} B \times h = \frac{1}{3} \times 64 \times 3 = 64\ cm^2$ الحجم

$P = 4 \times L = 4 \times 8 = 32\ cm$ محيط المربع

$LA = \frac{1}{2} P \times l = \frac{1}{2} \times 32 \times 5 = 80cm^2$ المساحة الجانبية

$TA = \frac{1}{2} P \times l + B = 80 + 64 = 144\ cm^2$ المساحة الكلية

ii)



قاعدة المثلث متساوي الاضلاع

الحل : $l = 13cm \;,\; h = 12cm \,, L = 5cm$

$B = \frac{\sqrt{3}}{4} \times L = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 5 = \frac{5\sqrt{3}}{4}$ مساحة المثلث

$V = \frac{1}{3} B \times h = \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{3}}{4} \times 12 = 5\sqrt{3}\ cm^2$ الحجم

$P = 5 + 5 + 5 = 15\ cm$ محيط المثلث

$LA = \frac{1}{2} P \times l = \frac{1}{2} \times 15 \times 13 = \frac{195}{2} = 97.5cm^2$ المساحة الجانبية

$TA = \frac{1}{2} P \times l + B = 97.5 + \frac{5\sqrt{3}}{4} = 97.5 + \frac{5(1.7)}{4} = 97.5 + \frac{8.5}{2}$

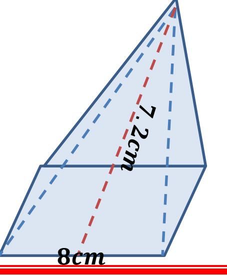
$= 97.5 + 2.125 = 99.625\ cm^2$ المساحة الكلية

ملاحظة :

مساحة المثلث = طول الضلع × $\frac{\sqrt{3}}{4}$

تدرب وحل التمرينات

8 جد المساحة الجانبية للهرم الذي قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها $8cm$ وارتفاعها الجانبي $7.2cm$



الحل : $L = 8cm \, , l = 7.2cm$

محيط المربع $P = 4 \times L = 4 \times 8 = 32 \ cm^2$

المساحة الجانبية $LA = \frac{1}{2} P \times l = \frac{1}{2} \times 32 \times 7.2 = 16 \times 7.2 = 115.2cm^2$

---

9 جد المساحة الجانبية للمضلع الثماني المنتظم الذي قياس طول ضلعه $1.16cm$ وارتفاعه الجانبي $2cm$

الحل : $n = 8cm \, , L = 1.16cm \, , H = 2cm$

$S = \frac{1}{2} L \times H \times n = \frac{1}{2} \times 1.16 \times 2 \times 8 = 9.28cm^2$

---

10 جد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لمخروط دائري قائم قطر قاعدته $35m$ وارتفاعه الجانبي $20m$ واكتب الجواب بدلالة π .

الحل : $r = \frac{35}{2} = 17.5m \, , l = 20m$

المساحة الجانبية $LA = 2\pi r \times l = 2\pi \times 17.5 \times 20 = 700\pi \ cm^2$

المساحة الكلية $TA = 2\pi r \times l + \pi r^2 = 700\pi + \pi(17.5)^2 = 700\pi + 306.25\pi = 1006.25\pi \ cm^2$

---

11 جد حجم هرم قاعدته مثلث منتظم وطول ضلعه $6m$ وارتفاعه $13m$.

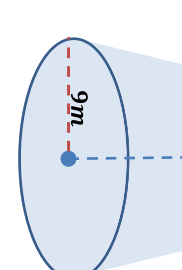
الحل : $L = 6m \, , h = 13m$

مساحة المثلث $B = \frac{1}{2} L \times h = \frac{1}{2} \times 6 \times 13 = 39 \ m^2$

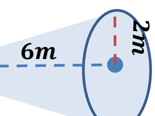
الحجم $V = \frac{1}{3} B \times h = \frac{1}{3} \times 39 \times 13 == 13 \times 13 = 169 \ m^3$

---

12 جد حجم الشكل المركب المجاور :



18m







اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998

الحل : لإيجاد حجم الجسم المركب نجد أولا حجم المخروط الصغير وحجم المخروط الكبير وبعد ذلك نجمع الحجوم

حجم المخروط الصغير : $h = 6m , r = 2m$

$$V_1 = \frac{1}{3}r^2\pi \times h = \frac{1}{3} \times (2)^2\pi \times 6 = 8\pi\ m^3$$

حجم المخروط الكبير : $h = 18m , r = 9m$

$$V_1 = \frac{1}{3}r^2\pi \times h = \frac{1}{3} \times (9)^2\pi \times 18 = 81 \times 6 = 486\pi\ m^3$$

$V = V_1 + V_2 = 8\pi + 486\pi = 494\pi\ m^3$ حجم الجسم المركب

تدرب وحل مسائل حياتية

13 علوم : نموذج بركاني على شكل مخروط دائري قائم طول قطر قاعدته $6cm$ اذا كان حجم النموذج $203cm^3$ تقريبا . ما ارتفاعه ؟

الحل : $r = \frac{6}{2} = 3cm , V = 203cm^3 , h = ?$

$V = \frac{1}{3}r^2\pi \times h$ حجم المخروط

$$203 = \frac{1}{3} \times (3)^2 \times h \times 3.14 \quad \Rightarrow \quad 203 = \frac{1}{3} \times 9 \times h \times 3.14 \Rightarrow 203 = 9.42 \times h$$

$h = \frac{203}{9.42} = \frac{20300}{942} = 21.55cm$ ارتفاع النموذج البركاني

---

14 بناء : يبلغ ارتفاع برج العرب $321m$ ويمثل هرما مقوسا . احسب المساحة التقريبية لقاعدته اذا كان حجم الهرم الذي يمثله $1904000m^3$.

الحل : $h = 321m , B = ? , V = 1904000m^3$

$V = \frac{1}{3}B \times h$ حجم الهرم

$$1904000 = \frac{1}{3} \times B \times 321 \quad \Rightarrow \quad 1904000 = B \times 107$$

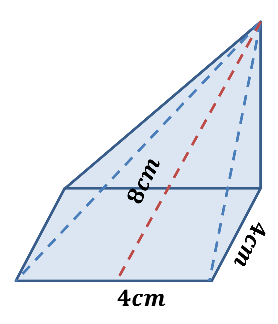
$B = \frac{1904000}{107} = 17794.4$ المساحة التقريبية

15 **هندسة :** جد المساحة الجانبية للهرم الذي قاعدته مربعة الشكل والمبين بالشكل المجاور .

الحل : $L = 4cm \, , l = 8cm$

محيط المربع $P = 4 \times L = 4 \times 4 = 16cm$

المساحة الجانبية $LA = \frac{1}{2} P \times l = \frac{1}{2} \times \times 16 \times 8 = 8 \times 8 = 64cm^2$



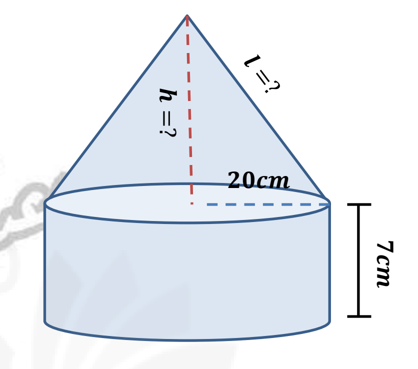
فكر

16 **تحد :** مخروط وأسطوانة لهما نفس القاعدة والحجم ,قطر الاسطوانة $40cm$ وارتفاعها $7cm$ ما المساحة الجانبية للمخروط ؟

الحل : الاسطوانة : $r = \frac{40}{2} = 20cm \, , h = 7cm$

حجم الاسطوانة $V = r^2 h\pi = (20)^2 \times 7\pi = 400 \times 7\pi = 2800\pi cm^2$

حجم الاسطوانة = حجم المخروط $2800\pi cm^3$



$V = \frac{1}{3} r^2 \pi \times h$

$2800\pi = \frac{1}{3} \times 400\pi \times h \quad \Rightarrow 8400\pi = 400\pi \times h$

$h = \frac{8400\pi}{400\pi} = 21cm$

$l^2 = h^2 + r^2 = (21)^2 + (20)^2 = 441 + 400 = 841$

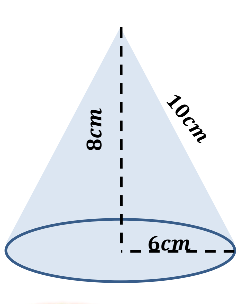
$l = \sqrt{841} = 29cm$



المساحة الجانبية $LA = 2\pi r \times l = 2\pi \times 20 \times 29 = 1160 \, cm^2$

---

17 **اكتشف الخطأ :** اي الحلين خطأ ؟ وضح اجابتك .



الحل الأول :

$V = \frac{1}{3} \times B \times h$

$V = \frac{1}{3} \times 36\pi \times 10 = 180\pi m^3$

الحل الثاني :

$V = \frac{1}{3} \times B \times h$

$V = \frac{1}{3} \times 6 \times 6\pi \times 8 = 96\pi m^3$

الحل : $r = 6cm\,,\, h = 8cm\,,\, l = 10cm$

$V = \frac{1}{3}r^2\pi \times h = \frac{1}{3} \times (6)^2\pi \times 8 = \frac{1}{3} \times 36\pi \times 8 = 96\pi\ cm^3 \Longrightarrow$ الحل الأول هو الخطأ

اكتب مسألة عن مضلع منظم تسمح المعطيات فيه بأيجاد محيط المضلع ومساحته ؟

الحل : جد محيط ومساحة الشكل التساعي المنتظم طول ضلعه $6cm$ وطول العامد $4cm$

$n = 9\,,\, H = 4cm\,,\, L = 6cm$

$P = n \times L = 9 \times 6 = 54\ cm$ المحيط

$A = \frac{1}{2}L \times H \times n = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times 9 = 108\ cm^2$ المساحة

المثلثات

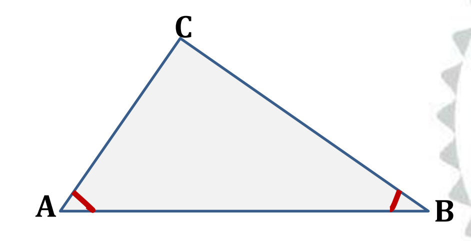
الاضلاع والزوايا في المثلث

(مبرهنات بدون برهان) في كل مثلث .

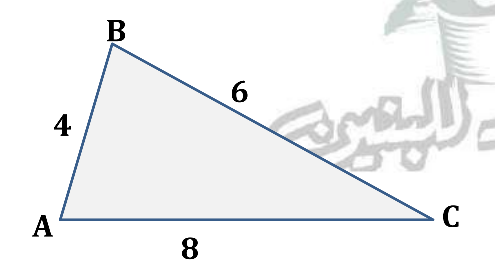


مبرهنة : اذا تباين ضلعا مثلث تباينت الزاويتان المقابلتان لهما , فأكبرهما

تقابل الضلع الاكبر وبالعكس : $BC > AC \Leftrightarrow m\angle A > m\angle B$



مثال في المثلث ادناه رتب الزوايا من الاكبر الى الاصغر .



الحل : الضلع الاقصر $\overline{AB} \Longleftarrow \therefore$ الزاوية الاصغر $\angle C$

الضلع الأطول $\overline{AC} \Longleftarrow \therefore$ الزاوية الأكبر $\angle B$

الترتيب هو : $\angle B\,,\, \angle C\,,\, \angle A$

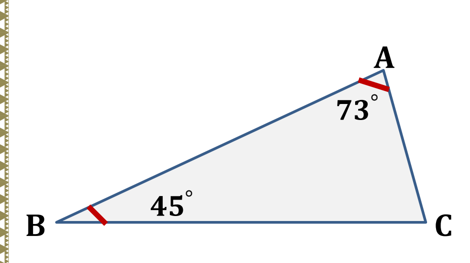
مثال في المثلث ادناه رتب الاضلاع من الاقصر الى الاطول واحسب قياس $\angle C$

الحل : مجموع زوايا المثلث $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$

$73^\circ + 45^{\circ\circ} + m\angle C = 180 \quad \Longrightarrow \quad 118^\circ + m\angle C = 180^\circ$

$m\angle C = 180^\circ - 118^\circ = 62^\circ$

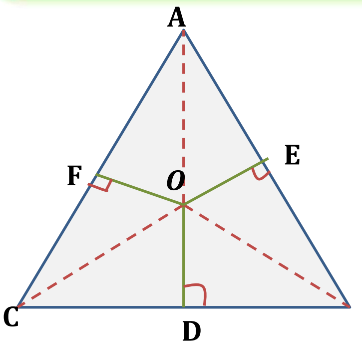
$\therefore\ m\angle B < m\angle C < m\angle A$



الترتيب هو : $\overline{AC}\,,\, \overline{BA}\,,\, \overline{BC}$

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين

07703153998



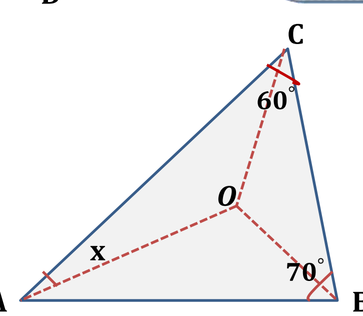
(مبرهنات بدون برهان) في كل مثلث

مبرهنة : منصفات زوايا المثلث تتلاقى بنقطة واحدة تكون متساوية الابعاد عن اضلاعه .

اذا كان : $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ منصفات الزوايا A, B, C على الترتيب تلتقي في نقطة O

فأن : $\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF}$

مثال في المثلث المجاور جد قيمة x ؟



الحل : $\overline{BO}$ تنصف $\angle B$, $\overline{CO}$ تنصف $\angle C$

$\therefore$ O نقطة التقاء منصفات زوايا المثلث ABC

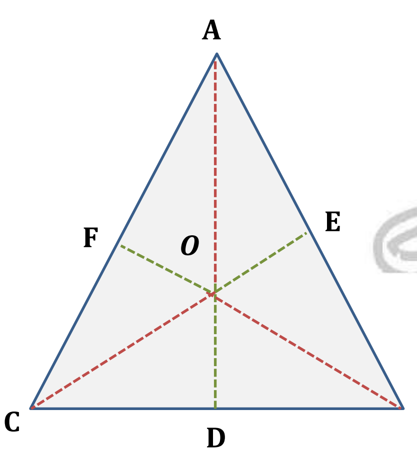
($\overline{AO}$ تنصف $\angle A$) $\Leftarrow$ $x = \frac{1}{2} m\angle A$

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$ مجموع زوايا المثلث

$m\angle A + 60^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Rightarrow m\angle A + 130^\circ = 180^\circ \Rightarrow m\angle A = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

$x = \frac{1}{2} m\angle A = \frac{1}{2} \times 50^\circ = 25^\circ$





(مبرهنات بدون برهان) في كل مثلث

مبرهنة : القطعة المستقيمة المتوسطة للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة تقسم كل منها بنسبة : $\frac{2}{3}$ من جهة الرأس .

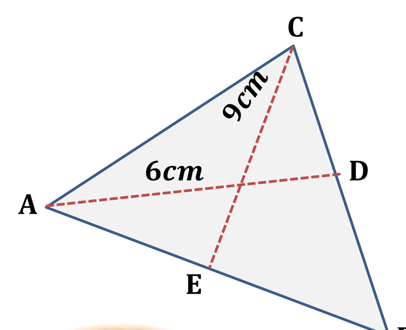
$$AO = \frac{2}{3} AD , BO = \frac{2}{3} BF , CO = \frac{2}{3} CE$$

$$OD = \frac{1}{3} AD , OF = \frac{1}{3} BF , OE = \frac{1}{3} CE$$

مثال المثلث ABC فيه $\overline{AD}$, $\overline{CE}$ قطعتان متوسطتان تلتقيان في النقطة O , AD = 6cm , CE = 9cm جد : $\overline{AO}$, $\overline{OE}$




الحل : $\overline{CE}$ قطعة متوسطة $OE = \frac{1}{3} CE$



$\therefore OE = \frac{1}{3} \times 9 = 3cm$

$\because OA = \frac{2}{3} AD \Rightarrow \therefore OA = \frac{2}{3} \times 6 = 2 \times 2 = 4cm$

$\overline{AD}$ قطعة متوسطة

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

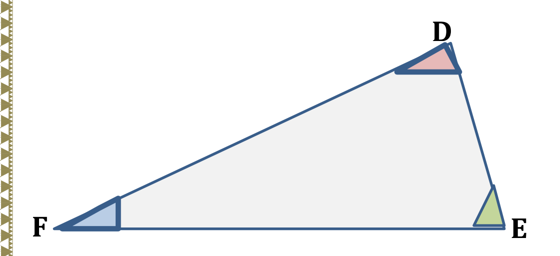
تشابه المثلثات

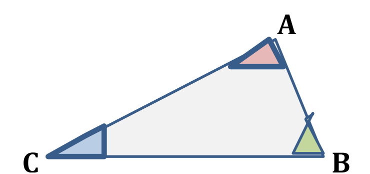
المثلثان المتشابهان : هما مثلثان تتناسب اضلاعهما وتتطابق زواياهما ويرمز للتشابه بالرمز (~) . المبرهنات بدون برهان :

مبرهنة : اذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر فأن المثلثين يتشابهان .

$$m\angle A = m\angle D \,,\, m\angle C = m\angle F \implies \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

مبرهنة : اذا تناسب ثلاث اضلاع من مثلث مع ثلاث اضلاع من مثلث آخر فأن المثلثين يتشابهان .

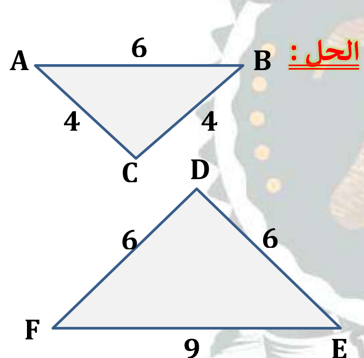






بين أن المثلثين في الشكل المجاور متشابهان واكتب نسبة التشابه .

الحل :



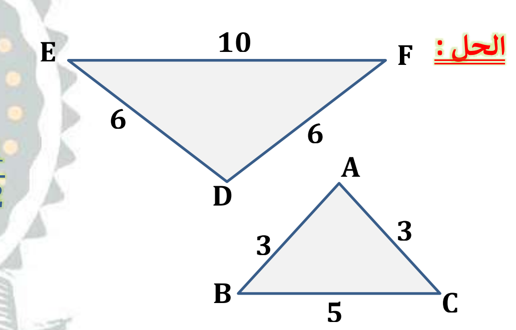
i) $\frac{AB}{EF} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$\frac{AC}{DE} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\frac{BC}{FD} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$

الحل :

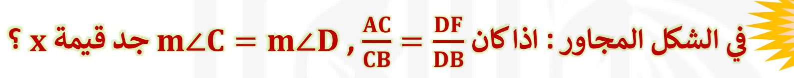


ii) $\frac{AB}{EF} = \frac{3}{10}$

$\frac{AC}{FD} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\frac{AB}{EF} \neq \frac{AC}{FD}$

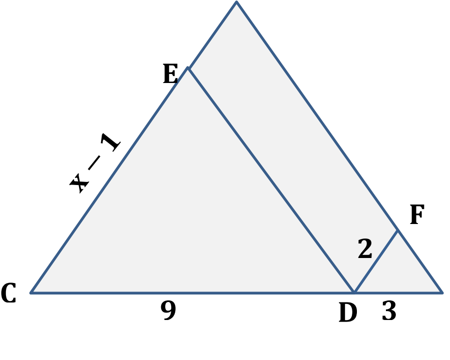
∴ المثلثان غير متشابهان .



مبرهنة : اذا تناسب ضلعان في مثلث مع ضلعين في مثلث آخر واذا تطابقت الزاوية بين الضلعين الاولين مع الزاوية بين الضلعين الثانيين فأن المثلثين يتشابهان

مثال

في الشكل المجاور : اذا كان $\frac{DF}{DB} = \frac{AC}{CB}$, $m\angle C = m\angle D$ جد قيمة x ؟



الحل :

∵ المثلثان BFD , DEC متشابهان ⟸ ∴ اضلاعهما متناظرة ومتناسبة

$$\frac{DF}{CE} = \frac{DB}{CD} \implies \frac{2}{x-1} = \frac{3}{9}$$

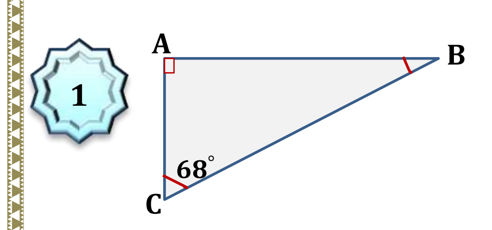
$$\frac{2}{x-1} = \frac{1}{3}$$ الطرفين في الوسطين

$$x - 1 = 6 \implies x = 6 + 1 = 7$$



اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين　07703153998

تأكد من فهمك رتب الزوايا من الاصغر الى الاكبر .

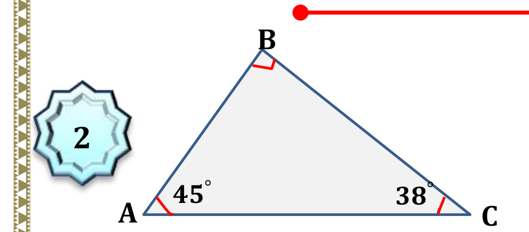
1


$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$ مجموع زوايا المثلث

$90^\circ + m\angle B + 68^\circ = 180^\circ \Rightarrow m\angle B + 158^\circ = 180^\circ$

$m\angle B = 180^\circ - 158^\circ = 22^\circ$

الترتيب هو $m\angle B, m\angle C, m\angle A$

2


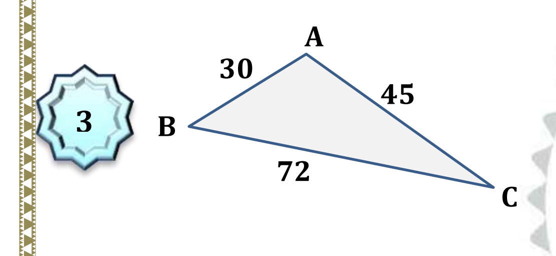
$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$ مجموع زوايا المثلث

$45^\circ + m\angle B + 38^\circ = 180^\circ \Rightarrow m\angle B + 83^\circ = 180^\circ$

$m\angle B = 180^\circ - 83^\circ = 97^\circ$

الترتيب هو $m\angle C, m\angle A, m\angle B$

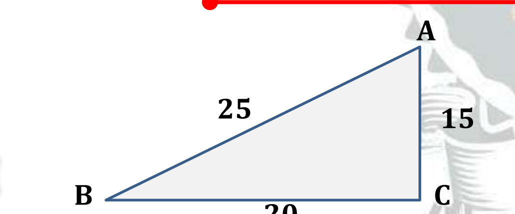
رتب الاضلاع من الاقصر الى الاطول :

3


الحل : الضلع الاقصر $\overline{AB} = 30$

الضلع الاطول $\overline{BC} = 72$

الترتيب هو : $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$

4


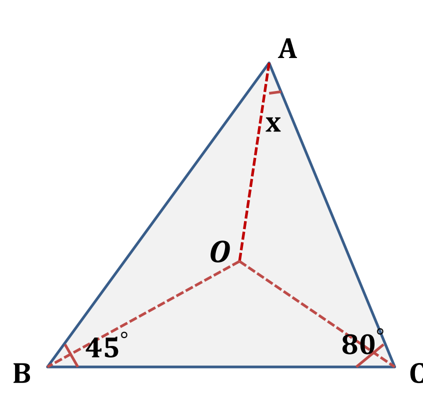
الحل : الضلع الاقصر $\overline{AC} = 15$

الضلع الاطول $\overline{AB} = 72$

الترتيب هو : $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AB}$



في المثلث المجاور اذا كان : $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}$ منصفات الزوايا A, B, C جد قيمة x .



الحل : $\overline{BO}$ تنصف $\angle B$, $\overline{CO}$ تنصف $\angle C$, $\overline{AO}$ تنصف $\angle A$

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$ مجموع زوايا المثلث

$m\angle A + 45^\circ + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow m\angle A + 125^\circ = 180^\circ$

$m\angle A = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$

$x = \frac{1}{2} m\angle A = \frac{1}{2} \times 55^\circ = 27.5^\circ$



ABC مثلث , O نقطة تقاطع مستقيماته المتوسطة اذا كان : $BO = 12cm$ جد طول القطعة المستقيمة التي احد طرفيها النقطة B .

الحل : $\overline{BF}$ قطعة متوسطة

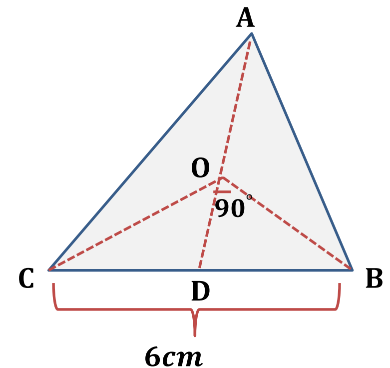
$$BO = \frac{2}{3}BF \Rightarrow 12 = \frac{2}{3}BF$$ الطرفين في الوسطين

$$2\,BF = 36 \Rightarrow BF = \frac{36}{2} = 18\text{ cm}$$




في المثلث ABC , O نقطة التقاء القطع المتوسطة , جد طول $\overline{AD}$ اذا علمت أن :

$$m\angle COB = 90^\circ , \overline{AO} \cap \overline{BC} = \{D\} , BC = 6cm$$



الحل : ΔCOB قائم الزاوية في O ((معطى))

$CD = DB$ لأن $\overline{AD}$ قطعة مستقيم متوسطة .

$$OD = \frac{1}{2}BC \Rightarrow OD = \frac{1}{2} \times 6 = 3cm$$

∴ النقطة O تقسم كل قطعة متوسطة بنسبة 1 :2 من جهة الرأس .

$$OD = \frac{1}{3}AD \Rightarrow 3 = \frac{1}{3}AD$$ الطرفين في الوسطين

$$AD = 9cm$$

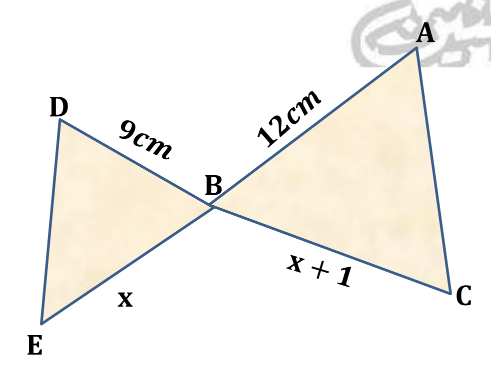


في الشكل المجاور :

i) بين أن المثلثين : ABC, BDE متشابهان .

ii) جد نسبة التناسب .

iii) جد قيمة x .

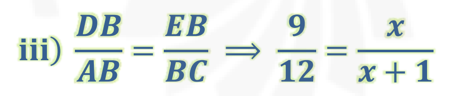




الحل :

i) $m\angle A = m\angle D$, $m\angle C = m\angle E \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta BDE$

ii) $\frac{DB}{AB} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$



iii) $\frac{DB}{AB} = \frac{EB}{BC} \Rightarrow \frac{9}{12} = \frac{x}{x+1}$

$\frac{3}{4} = \frac{x}{x+1}$ الطرفين في الوسطين

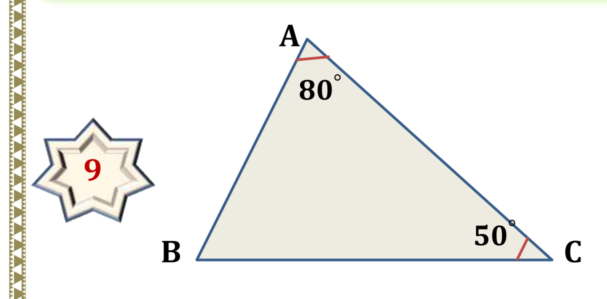
$4x = 3x + 3 \Longrightarrow 4x - 3x = 3$

$x = 3$


07703153998

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين

تدرب وحل التمرينات رتب الزوايا من الاصغر الى الاكبر :



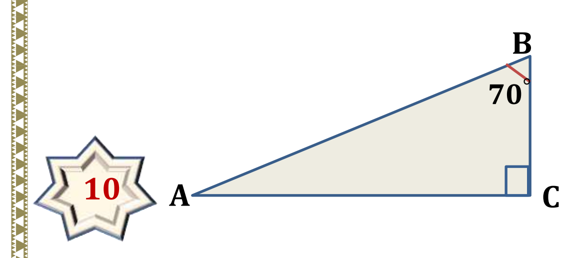
الحل :

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$ مجموع زوايا المثلث

$80^\circ + m\angle B + 50^\circ = 180^\circ \Rightarrow m\angle B + 130^\circ = 180^\circ$

$m\angle B = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

الترتيب هو : $m\angle C , m\angle B , m\angle A$



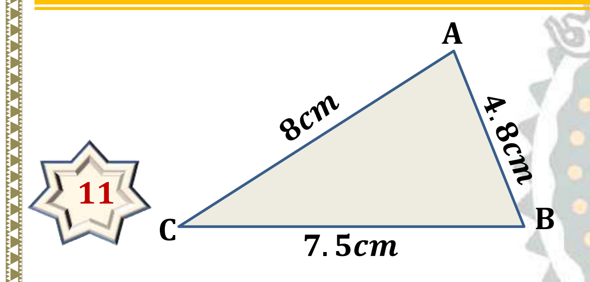
$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$ مجموع زوايا المثلث

$m\angle A + 70^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow m\angle A + 160^\circ = 180^\circ$

$m\angle B = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$

الترتيب هو :ؤ$m\angle A, m\angle B , m\angle A$

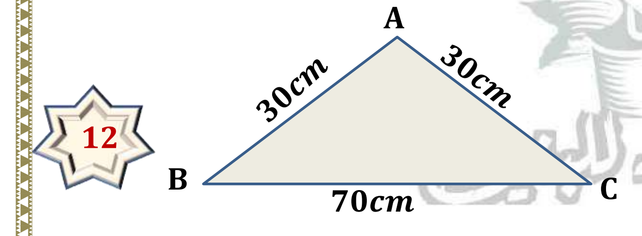
رتب الاضلاع من الاقصر الى الاطول :



الحل : الضلع الاقصر $\overline{AB} = 4.8cm$

الضلع الاطول $\overline{AC} = 8cm$

الترتيب هو : $\overline{AB} , \overline{BC} , \overline{AC}$



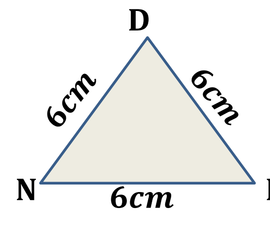
الحل : الضلع الاقصر $\overline{AB} = \overline{AC} = 30cm$

الضلع الاطول $\overline{BC} = 70cm$

الترتيب هو : $\overline{AB} , \overline{AC} , \overline{BC}$

---

13 بين ان المثلثين ABC, DNE في الشكل المجاور متشابهان واكتب نسبة التشابه ثم سمي ازواج الزوايا المتطابقة .



A, 8cm, 8cm, 8cm, C, B

الحل :

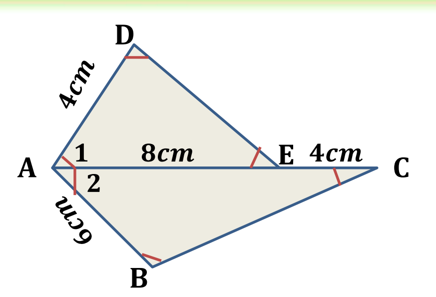
$\frac{DN}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, $\frac{NE}{BC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$\frac{DE}{AB} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{DN}{AC} = \frac{NE}{BC} = \frac{DE}{AB}$

∴ المثلثين متشابهان

$m\angle A = m\angle D , m\angle B = m\angle E , m\angle C = m\angle N$

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998



14 بين أن المثلثين ABC, ADE في الشكل المجاور متشابهان
واكتب نسبة التشابه ثم بين أن : $\angle 1 \cong \angle 2$

الحل :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad , \quad \frac{AE}{AC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow$ المثلثين متشابهان

$$m\angle D = m\angle B \,, m\angle C = m\angle E \,, m\angle 1 = m\angle 2$$

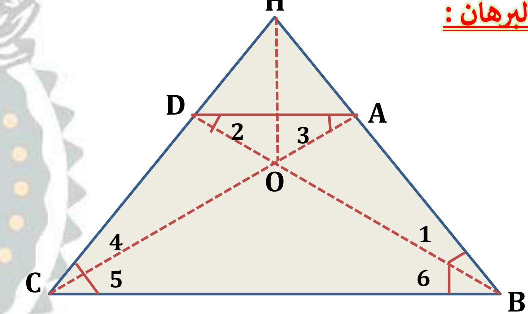
$\therefore \angle 1 \cong \angle 2$ لأن المثلثين متشابهان

---

15 ABCD شبه منحرف فيه : $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{CD} = \{H\} \,, \overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{BD} = \{O\} \,, \overline{AB} = \overline{AD} = \overline{DC} \,, \overline{AD} \parallel \overline{BC}$

برهن أن : $\overrightarrow{HO}$ ينصف الزاوية BHC .

البرهان :




$\because \overline{AB} = \overline{AD}$ (معطى)

$\therefore m\angle 1 = m\angle 2 \,, m\angle 3 = m\angle 4$ (خواص مثلث متساوي الساقين)

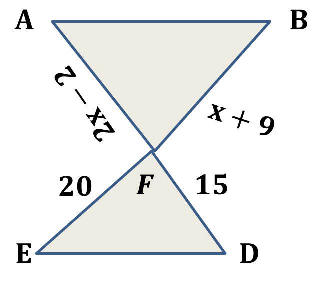
$\because m\angle 2 = m\angle 6 \,, m\angle 3 = m\angle 5$ (بالتبادل والتوازي لأن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$)

$\because m\angle 1 = m\angle 6 \,, m\angle 4 = m\angle 5$ (بالاستعاضة)

$\therefore$ $\overline{BO}$ منصف الزاوية B , $\overline{CA}$ منصف الزاوية C

$\overline{HO}$ منصف الزاوية H ((تعريف منصفات الزوايا))

تدرب وحل مسائل حياتية



17 هندسة : استعمل المعلومات في الشكل المجاور لتجد قيمة x .

الحل :

$$\frac{EF}{FB} = \frac{DF}{FA}$$

$\frac{20}{x+9} = \frac{15}{2x-2}$ الطرفين في الوسطين

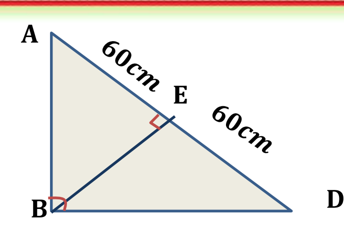
$$40x - 40 = 15x + 135 \Rightarrow 40x - 15x = 40 + 135$$

$$25x = 175 \Rightarrow x = \frac{175}{25} = 7$$



بناية : بناية ارتفاعها يمثل بضلع مثلث قائم الزاوية كما في الشكل المجاور .

برهن أن : $i)\ \angle EBD \cong \angle D \quad , \quad ii)\ \Delta ABE \simeq \Delta BED$



الحل :

$ii)\ \Delta ABE: \quad AE = BE = AB = 60cm$

$\Delta BED: ED = BE = BD = 60cm$

$\therefore \Delta ABE \simeq \Delta BED$

E منتصف $\overline{AD} \Leftarrow$ $i)\ BE = \frac{1}{2}AD$

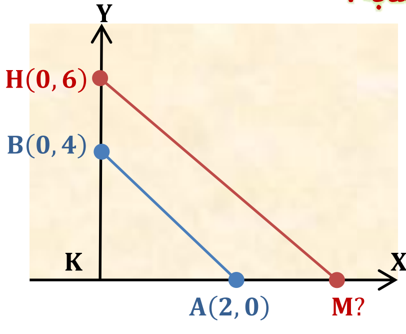
$BE = \frac{1}{2} \times 120 = 60cm \implies$ ∴EBDΔ منتظم (متساوي الاضلاع)

قياس كل زاوية من زوايا المثلث $EBD = 60^\circ$

$\angle EBD = 60^\circ \ , \ \angle D = 60^\circ \quad \implies \ \therefore \angle EBD \cong \angle D$

19

في الشكل المجاور المثلثان KBA, KMH متشابهان جد احداثيي M . ونسبة التشابه .



الحل :

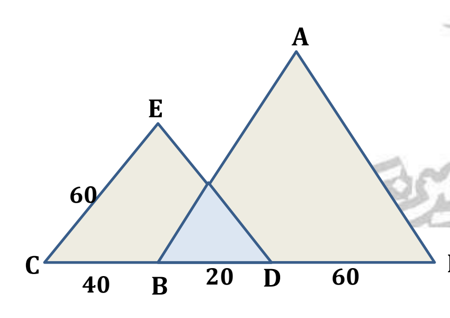
$\frac{KB}{KH} = \frac{KA}{KM} \implies \frac{4}{6} = \frac{2}{M}$ الطرفين في الوسطين

$4M = 12 \implies M = \frac{12}{4} = 3 \implies M(3,0)$

فكر



اكتشف : ما طول $\overline{AB}$ في الرسم المجاور ؟



الحل :

$\frac{EC}{AB} = \frac{CD}{BF} \implies \frac{60}{AB} = \frac{60}{80}$

$\frac{60}{AB} = \frac{3}{4}$ الطرفين في الوسطين $\implies 3 \times AB = 240$

$AB = \frac{240}{3} = 80$

21

تحد : $(12,8,6)$ و $(x,20,15)$ هي اطوال اضلاع متناظرة في مثلثين متشابهين , ما قيمة x ؟

الحل :

$\frac{x}{12} = \frac{20}{8} \implies \frac{x}{12} = \frac{5}{2}$ الطرفين في الوسطين $\implies 2x = 60$

$x = \frac{60}{2} = 30$

22 حس عددي : جد قيمة x في الشكل المجاور.

الحل : المثلثان ABD, EBC متشابهان .

$$\frac{EC}{AD} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \frac{4}{x+5} = \frac{3}{x+3}$$ الطرفين في الوسطين

$$4x + 12 = 3x + 15 \Rightarrow 4x - 3x = 15 - 12$$

$$x = 3$$

---

23 مسألة مفتوحة : اشرح لماذا تحتاج قياسات الزوايا للتأكد من تشابه المثلثات . اعط مثالا على ذلك .

الحل : بين في الشكل المجاور أن المثلثين ABC, DEF متشابهان . وبرر اجابتك :

في ΔABC فيه :

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$$ مجموع زوايا المثلث

$$57^\circ + m\angle B + 57^\circ = 180^\circ \Rightarrow m\angle B + 114^\circ = 180^\circ$$

$$m\angle B = 180^\circ - 114^\circ = 66^\circ$$

في ΔDEF نفرض $m\angle E = m\angle F = x$

$$m\angle D + m\angle E + m\angle F = 180^\circ$$ مجموع زوايا المثلث

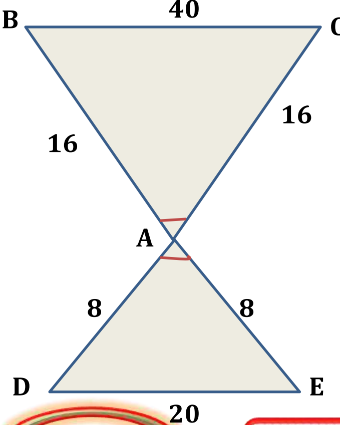
$$66^\circ + x + x = 180^\circ \Rightarrow 66^\circ + 2x = 180^\circ \Rightarrow 2x = 180^\circ - 66^\circ$$

$$2x = 114^\circ \Rightarrow x = \frac{114^\circ}{2} = 57^\circ \Rightarrow m\angle E = m\angle F = 57^\circ$$

$$\because m\angle B = m\angle D = 66^\circ, m\angle A = m\angle E = 57^\circ, m\angle C = m\angle F = 57^\circ$$

$\therefore$ المثلثين ABC, DEF متشابهان .

اكتب مسألة عن مثلثان متساويا الساقين تتطابق فيهما زاويتا الرأس وجد نسبة التشابه ؟



الحل :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}, \quad \frac{AE}{AC} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{DE}{BC} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$





مبرهنة التناسب المثلثي		
المبرهنة	**المعطى**	**النتيجة**
اذا وازى مستقيم ضلعا من اضلاع مثلث وقطع الضلعين الاخرين في نقطتين مختلفتين فأنه يقسم الضلعين الى قطع متناسبة الاطوال ((بدون برهان)) .	$\overline{AB} \parallel \overline{EF}$	$\frac{CE}{EA} = \frac{CF}{FB}$



جد طول قطعة المستقيم AE علما أن : $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ في الشكل المجاور :

الحل :

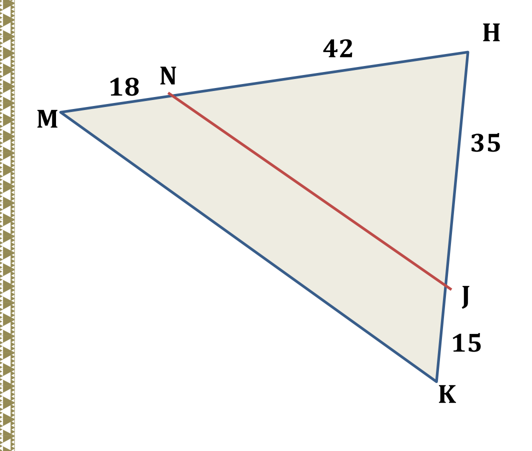
$$\frac{CF}{FB} = \frac{CE}{AE} \Rightarrow \frac{12}{4} = \frac{9}{AE}$$ الطرفين في الوسطين

$$12 \times AE = 36 \Rightarrow AE = \frac{36}{12} = 3\ cm$$

عكس مبرهنة التناسب المثلثي		
المبرهنة	**المعطى**	**النتيجة**
اذا قسم مستقيم ضلعين في مثلث الى قطع متناسبة فأنه يكون موازيا للضلع الثالث ((بدون برهان)) .	$\frac{CE}{EB} = \frac{CF}{FA}$	$\overline{EF} \parallel \overline{AB}$

مثال

في الشكل المجاور برهن أن : $\overline{MK} \parallel \overline{NJ}$



الحل :

نجد نسبة الاجزاء المتناسبة $\frac{HN}{NM} = \frac{42}{18} = \frac{7}{3}$, $\frac{HJ}{JK} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$

$$\therefore \frac{HJ}{JK} = \frac{HN}{NM} = \frac{7}{3}$$

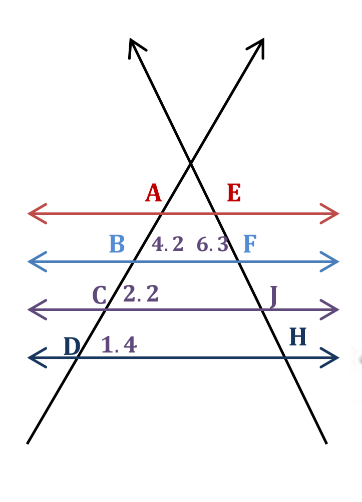
$$\therefore \overline{MK} \parallel \overline{NJ}$$

مبرهنة طالس		
المبرهنة	**المعطى**	**النتيجة**
اذا قطعت ثلاث مستقيمات متوازية او اكثر فأن القطع المحددة بالمستقيمات المتوازية تكون متناسبة .	$\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BF} \parallel \overleftrightarrow{CE}$	$\frac{AB}{BC} = \frac{DF}{FE}$

مثال

استعمل مهندس الرسم المنظوري (هو رسم الأجسام البعيدة بحيث تبدو اصغر والاجسام القريبة حيث تبدو اكبر مع الحفاظ على هيئتها وتناسب مقاييسها لتبدو ثلاثية الابعاد) ليرسم خطوطا أولية تساعده على رسم اعمدة اتصالات متوازية تحقق من رسمه بقياس المسافات بين الاعمدة , كم طول $\overline{FH}$ ؟

الحل :



$\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{BF} \parallel \overleftrightarrow{CJ} \parallel \overleftrightarrow{DH}$

$\frac{AB}{BD} = \frac{EF}{FH}$ مبرهنة طالس $\Rightarrow BD = BC + CD = 2.2 + 1.4 = 3.6$

$\frac{4.2}{3.6} = \frac{6.3}{FH} \Rightarrow \frac{7}{6} = \frac{6.3}{FH}$ الطرفين في الوسطين

$7 \times FH = 6 \times 6.3$

$FH = \frac{6 \times 6.3}{7} = 6 \times 0.9 = 5.4m$

التناسب والقياس

لإيجاد نسبة المحيطين ونسبة المساحتين لمثلثان متشابهان يمكننا استعمال البرهنة التالية . ((بدون برهان)) .

مبرهنة : اذا تشابه مثلثان بنسبة تشابه $\frac{a}{b}$ فأن نسبة المحيطين تساوي $\frac{a}{b}$ ونسبة المساحتين $\frac{a^2}{b^2}$

اذا كان المثلثان متشابهان فأن النسبة بين محيطيهما تساوي النسبة اطوال الاضلاع المتناظرة .







ليكن $\Delta ABC \sim \Delta TVW$ جد محيط ΔABC

الحل :

نفرض P_1 محيط المثلث TVW

$P_1 = 8 + 4 + 5 = 17cm$ مجموع اضلاعه الثلاثة

نفرض P_2 محيط المثلث ABC

$\frac{P_2}{P_1} = \frac{AB}{VW}$ نستعمل التناسب

$\frac{P_2}{17} = \frac{5}{8}$ الطرفين في الوسطين

$8 \times P_2 = 85 \Rightarrow P_2 = \frac{85}{8} = 10.625\ cm$



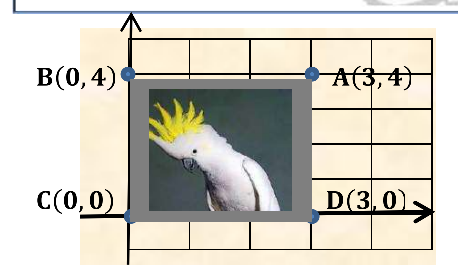
التناسب الهندسي : هو تحويل يغير مقاييس الاشكال الهندسية دون تغير هيئتها فالشكل وصورته بالتناسب الهندسي يكونان دائما متشابهين .

اذا تعاملت مع تناسب هندسي معامله الهندسي M فسوف يكون بإمكانك ان تجد صورة النقطة بضرب احداثيها في M

$(x, y) \rightarrow (Mx, My)$



يبين الرسم المجاور موقع على شبكة الانترنت , أرسم حدود الصورة بعد تحويلها بتناسب هندسي نسبته $\frac{5}{3}$.



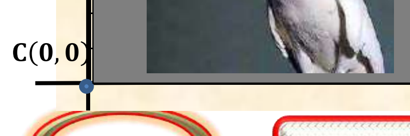
الحل :

$(x, y) \rightarrow (Mx, My)$

$A(3,4) \rightarrow A'\left(\frac{5}{3} \times 3, \frac{5}{3} \times 4\right) \rightarrow A'\left(3, \frac{20}{3}\right) \rightarrow A'(3, 6.6)$

$B(0,4) \rightarrow B'\left(\frac{5}{3} \times 0, \frac{5}{3} \times 4\right) \rightarrow B'\left(0, \frac{20}{3}\right) \rightarrow B'(0, 6.6)$

$C(0,4) \rightarrow C'\left(\frac{5}{3} \times 0, \frac{5}{3} \times 0\right) \rightarrow C'(0, 0)$

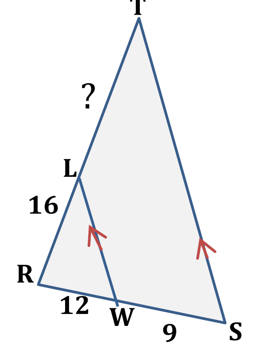


$$D(3,0) \to D'\left(\frac{5}{3}\times 3, \frac{5}{3}\times 0\right) \to D'(5,0)$$

نضع النقاط A', B', C', D' على المستوي الإحداثي ثم نصل بينهم لنحصل على المستطيل A', B', C', D'

تأكد من فهمك جد طول القطعة المستقيمة المجهولة في الاشكال الاتية :

1



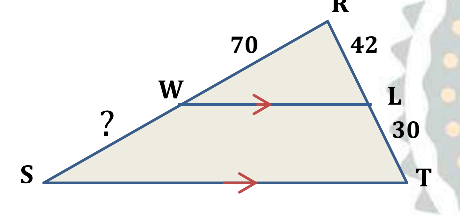
الحل : الضلع المجهول هو LT

$$\frac{RL}{LT} = \frac{RW}{WS}$$ مبرهنة التناسب المثلثي

$$\frac{16}{LT} = \frac{12}{9}$$ الطرفين في الوسطين

$$12 \times LT = 144 \implies LT = \frac{144}{12} = 12$$

2



الحل : الضلع المجهول هو WS

$$\frac{RW}{WS} = \frac{RL}{LT}$$ مبرهنة التناسب المثلثي

$$\frac{70}{WS} = \frac{42}{30} \implies \frac{70}{WS} = \frac{7}{5}$$ الطرفين في الوسطين

$$7 \times WS = 350 \implies WS = \frac{350}{7} = 50$$



في المثلث MQP , $MN = 9$, $MP = 25$, $\overline{MR} = 4.5$, $MQ = 12.5$ هل $\overline{QP} \parallel \overline{RN}$ أم لا ؟ برر اجابتك .

الحل :

25
9
M
N
4.5
P
R
12.5
Q

$$RQ = MQ - MR = 12.5 - 4.5 = 8$$

$$\frac{MR}{RQ} = \frac{4.5}{8} = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}$$

$$NP = MP - MN = 25 - 9 = 16$$

$$\frac{MN}{NP} = \frac{9}{16}$$

$$\therefore \frac{MR}{RQ} = \frac{MN}{NP} = \frac{9}{16}$$

$\overline{RN} \parallel \overline{QP}$ عكس مبرهنة التناسب المثلثي

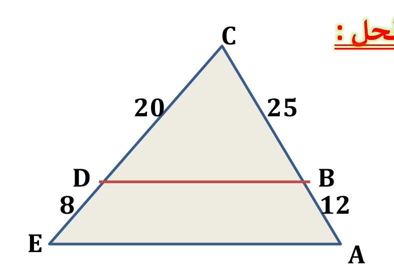






في المثلث ACE , $BC = 25$, $DC = 20$, $ED = 8$, $AB = 12$ حدد اذا كان $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$ أم لا ؟ برر أجابتك .

الحل :

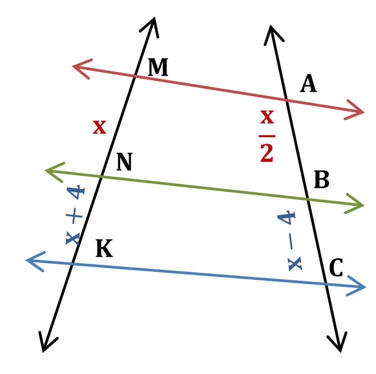


$$\frac{CD}{DE} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \quad , \quad \frac{BC}{AB} = \frac{25}{12}$$

$$\therefore \frac{CD}{DE} \neq \frac{BC}{AB} \Rightarrow \overline{AE} \nparallel \overline{BD}$$

---

5 في الرسم المجاور جد طول $\overline{KN}, \overline{MN}$



الحل :

$$\frac{MN}{NK} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{\frac{x}{2}}{x-4}$$ الطرفين في الوسطين

$$x(x-4) = \frac{x}{2}(x+4) \ \} \times 2$$

$$2x(x-4) = x(x+4) \Rightarrow 2x^2 - 8x = x^2 + 4x$$

$$2x^2 - 8x - x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x^2 - 12x = 0$$

$x(x-12) = 0 \Rightarrow$ أما $x = 0$ يهمل أو $x - 12 = 0 \Rightarrow x = 12$

$\overline{MN} = x = 12 \quad , \quad \overline{KN} = x + 4 = 12 + 4 = 16$

---

6 المثلثان ABC, KMH متشابهان مساحة ΔABC

ضعف مساحة ΔKMH كم طول $\overline{AB}$ ؟

A B C — H K N M 4cm 4cm 8cm 8cm

الحل :

$\because$ المثلث KMH متساوي الساقين $\Leftarrow$ $\overline{KM} = 8cm$

$(HM)^2 = (HN)^2 + (MN)^2$ مبرهنة فيثاغورس

$$(8)^2 = (HN)^2 + (4)^2 \Rightarrow 64 = (HN)^2 + 16 \Rightarrow (HN)^2 = 64 - 16 = 48$$

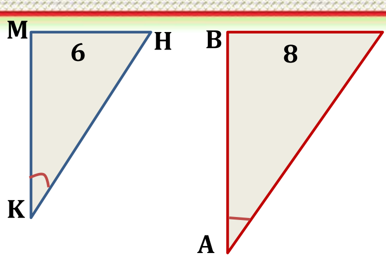
$$HN = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}\ cm$$

نفرض A_1 مساحة ΔKMH $\Leftarrow$ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

$$A_1 = \frac{1}{2} MK \times HN = \frac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}\ cm^2$$

نفرض A_2 مساحة ΔABC $\Leftarrow$

$$A_2 = 2A_1 = 2 \times 16\sqrt{3} = 32\sqrt{3}\ cm^2$$



7 المثلثان ABC, KMH متشابهان جد مساحة ومحيط المثلث ABC علما ان محيط المثلث KMH يساوي 8cm ومساحته $15cm^2$

الحل : نفرض A_1 مساحة المثلث KMH . نفرض A_2 مساحة المثلث ABC

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{(MH)^2}{(BC)^2} \Rightarrow \frac{15}{A_2}=\frac{(6)^2}{(8)^2} \Rightarrow \frac{15}{A_2}=\frac{36}{64} \Rightarrow \frac{15}{A_2}=\frac{9}{16}$$ الطرفين في الوسطين

$$9\times A_2=240 \Rightarrow A_2=\frac{240}{9}=26.6cm^2$$ مساحة المثلث ABC

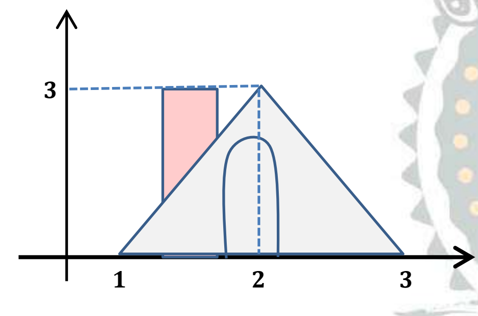
نفرض P_1 محيط المثلث KMH . نفرض P_2 محيط المثلث ABC

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{MH}{BC} \Rightarrow \frac{8}{P_2}=\frac{6}{8} \Rightarrow \frac{8}{P_2}=\frac{3}{4}$$ الطرفين في الوسطين

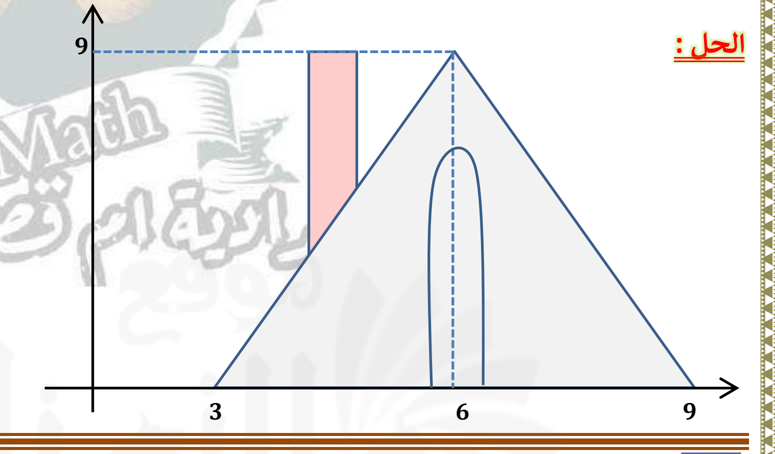
$$3\times P_2=32 \Rightarrow P_2=\frac{32}{3}=10.6\ cm$$ محيط المثلث ABC

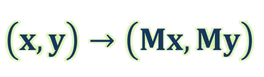
---

8 صمم احد المهندسين الرسم المجاور لأحدى الشركات العقارية طلبت الشركة تكبير الرسم 3 مرات لاستعماله كإعلان . ارسم حدود هذه الصورة بعد تحويلها بتناسب هندسي نسبته 3 .



الحل :





$(x, y) \rightarrow (Mx, My)$

$(0,3) \rightarrow (3\times 0, 3\times 3) \rightarrow (0,9)$

$(2,0) \rightarrow (3\times 2, 3\times 0) \rightarrow (6,0)$

$(1,0) \rightarrow (3\times 1, 3\times 0) \rightarrow (3,0)$

$(3,0) \rightarrow (3\times 3, 3\times 0) \rightarrow (9,0)$

---

9 ABC مثلث حيث $A(6,0), B\left(-3,\frac{3}{2}\right), C(3,-6)$ جد صورته بعد تصغيره بمعامل $\frac{1}{3}$ علما ان مركز التناسب هو نقطة الأصل .

الحل :

$(x, y) \rightarrow (Mx, My)$

$A(6,0) \rightarrow A'\left(\frac{1}{3}\times 6, \frac{1}{3}\times 0\right) \rightarrow A'(2,0)$

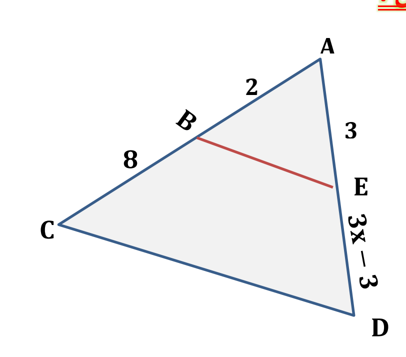
$B\left(-3,\frac{3}{2}\right) \rightarrow B'\left(\frac{1}{3}\times(-3), \frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\right) \rightarrow B'\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

$C(3,-6) \rightarrow C'\left(\frac{1}{3}\times 3, \frac{1}{3}\times(-6)\right) \rightarrow C'(1,-2)$

تدرب وحل التمرينات


في المثلث ACD , $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$ جد قيمة x و $\overline{ED}$ اذا كان : $AB = 2$, $AE = 3$, $BC = 8$, $ED = 3x - 3$

الحل :



$$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{ED} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{3}{3x-3}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{3x-3}$$ الطرفين في الوسطين

$$3x - 3 = 12 \Rightarrow 3x = 12 + 3 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{3} = 5$$

$$\overline{ED} = 3x - 3 = 3(5) - 3 = 15 - 3 = 12$$

---

11 حدد ما اذا كان $\overline{MK} \parallel \overline{AB}$ في الشكل المجاور .

الحل :

$$\frac{CA}{AM} = \frac{4.5}{1.5} = 3 \quad , \quad \frac{CB}{BK} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\because \frac{CA}{AM} = \frac{CB}{BK} = 3 \Rightarrow \therefore \overline{AB} \parallel \overline{MK}$$

---

12 نسبة مساحة المثلث ABC الى نسبة مساحة المثلث KMH تساوي $\frac{16}{25}$ ما نسبة تشابه المثلثين وما النسبة بين محيطهما

الحل : نسبة تشابه المساحتين $= \frac{a^2}{b^2}$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{5}$$ نسبة تشابه المثلثين

نسبة التشابه بين محيطيهما $= \frac{a}{b}$ $\Leftarrow$ نسبة التشابه بين محيطيهما $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$

---

13 جد صورة المثلث ABC حيث $A(-1,-1), B(1,-2), C(1,2)$ تحت تأثير تناسب معامله 2

الحل :

$$(x, y) \longrightarrow (Mx, My)$$

$$A(-1,-1) \longrightarrow A'(2 \times (-1), 2 \times (-1)) \longrightarrow A'(-2,-2)$$

$$B(1,-2) \longrightarrow B'(2 \times 1, 2 \times (-2)) \longrightarrow B'(2,-4)$$

$$C(1,2) \longrightarrow C'(2 \times 1, 2 \times 2) \longrightarrow B'(2,4)$$



تدرب وحل مسائل حياتية



طرق : تمثل الخريطة المجاورة بعض الشوارع المتوازية وطرقين عبرها , ما طول الطريق الأول بين الشارع 62 والشارع 52 ؟

استدارة
شارع 42
شارع 52
شارع 62
54m
?
81m
27m
الطريق الأول
الطريق الثاني

الحل :

نفرض $x = ?$

الطرفين في الوسطين $\frac{54}{x} = \frac{81}{27} \Rightarrow \frac{54}{x} = \frac{3}{1}$

$3x = 54 \Rightarrow x = \frac{54}{3} = 18\text{ m}$



هندسة : جد صورة الشكل الرباعي حيث : $A(2,6), B(-4,0), C(-4,-8), D(-2,-12)$ تحت تأثير تناسب معامله $\frac{1}{4}$

الحل :

$(x,y) \longrightarrow (Mx, My)$

$A(2,6) \longrightarrow A'\left(\frac{1}{4}\times 2, \frac{1}{4}\times 6\right) \longrightarrow A'\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$B(-4,0) \longrightarrow B'\left(\frac{1}{4}\times(-4), \frac{1}{4}\times 0\right) \longrightarrow B'(-1,0)$

$C(-4,-8) \longrightarrow C'\left(\frac{1}{4}\times(-4), \frac{1}{4}\times(-8)\right) \longrightarrow C'(-1,-2)$

$D(-2,-12) \longrightarrow C'\left(\frac{1}{4}\times(-2), \frac{1}{4}\times(-12)\right) \longrightarrow D'\left(\frac{-1}{2}, -3\right)$

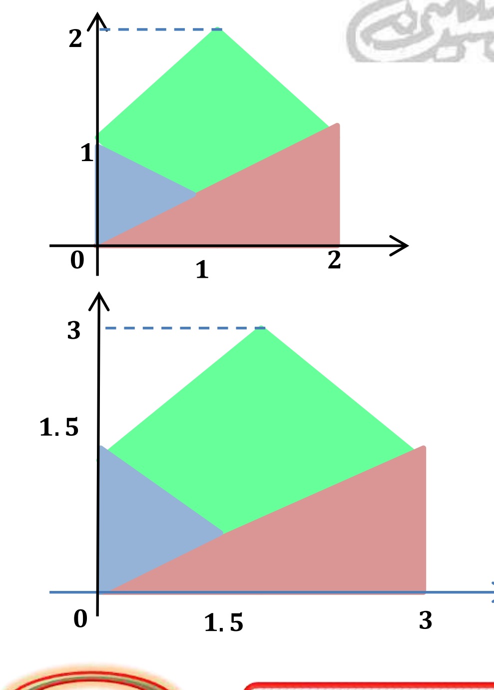


خياطة : صمم خياط الغطاء المقابل وعرضه على الزبائن بشكل اكبر



ارسم حدود الصورة بعد تكبيرها بتناسب هندسي نسبته $\frac{3}{2}$ ؟

الحل :



$(x,y) \longrightarrow (Mx, My)$

$(0,0) \longrightarrow \left(\frac{3}{2}\times 0, \frac{3}{2}\times 0\right) \longrightarrow (0,0)$

$(1,0) \longrightarrow \left(\frac{3}{2}\times 1, \frac{3}{2}\times 0\right) \longrightarrow \left(\frac{3}{2}, 0\right) \longrightarrow (1.5, 0)$

$(2,0) \longrightarrow \left(\frac{3}{2}\times 2, \frac{3}{2}\times 0\right) \longrightarrow (3,0)$

$(0,1) \longrightarrow \left(\frac{3}{2}\times 0, \frac{3}{2}\times 1\right) \longrightarrow \left(0, \frac{3}{2}\right) \longrightarrow (0, 1.5)$

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

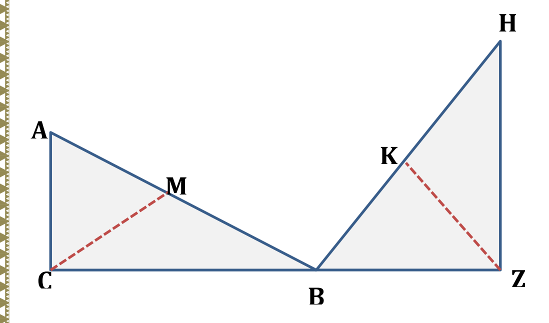
$(0,2) \longrightarrow \left(\frac{3}{2}\times 0, \frac{3}{2}\times 2\right) \longrightarrow (0,3)$





تحد : في الشكل المجاور M منتصف $\overline{AB}$ و K منتصف $\overline{HB}$ الزوايا :

$\angle Z, \angle ABH, \angle C$ قائمة برهن أن : $\frac{\text{مساحة } \Delta BZH}{\text{مساحة } \Delta ABC} = \left(\frac{KZ}{CM}\right)^2$



الحل : نفرض مساحة $\Delta BZH = A_1$ و مساحة $\Delta ABC = A_2$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع $\Leftarrow$ المثلثان KHZ, KZB متساوي الساقين فيه $KZ = BZ , KZ = HZ$

المثلثان MCB , ACM فيه $CM = BC , CM = AC$



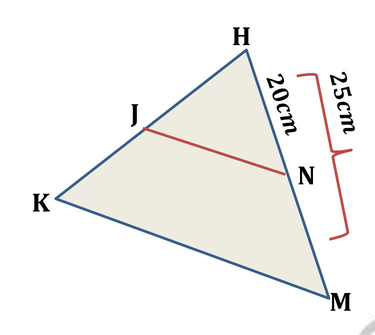
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{1}{2} BZ\times HZ}{\frac{1}{2} BC\times AC} = \frac{KZ\times KZ}{CM\times CM} = \frac{(KZ)^2}{(CM)^2} = \left(\frac{KZ}{CM}\right)^2$$



جبر : في المثلث HKM اذا كان : $HM = 25cm, HN = 20cm$ وطول $\overline{HJ}$ اربع امثال طول $\overline{JK}$ فحدد اذا كان



$\overline{MK} \parallel \overline{NJ}$ ؟



الحل : $HJ = 4\,JK \;,\; NM = HM - HN = 25 - 20 = 5cm$

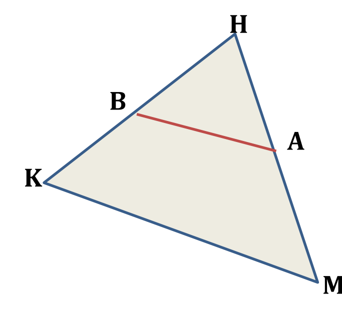
$\frac{HN}{NM} = \frac{20}{5} = 4 \;,\; \frac{HJ}{JK} = \frac{4\,JK}{KJ} = 4$

$\therefore \frac{HN}{NM} = \frac{HJ}{JK} = 4 \Longrightarrow \therefore \overline{MK} \parallel \overline{NJ}$



اكتب ما تستطيع من تناسبات اذا علمت أن : $\overline{AB} \parallel \overline{MK}$ في المثلث HKM

الحل :



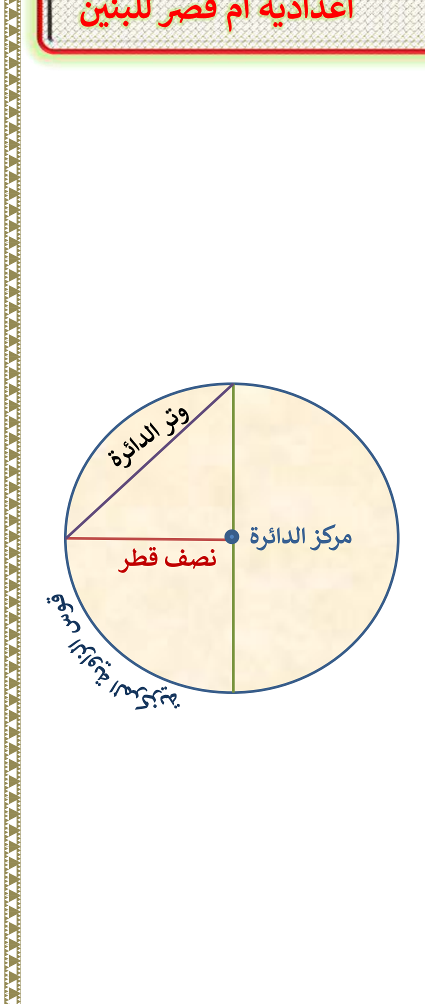
$\frac{HA}{AM} = \frac{HB}{BK}$

$\therefore \overline{MK} \parallel \overline{AB}$

07703153998 اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين

الدائرة





الدائرة : هي مجموعة من النقاط المتصلة في المستوي والتي لها البعد نفسه عن نقطة ثابتة تسمى مركز الدائرة .

نصف قطر الدائرة r : هو قطعة مستقيمة تصل بين مركز الدائرة ونقطة على الدائرة .

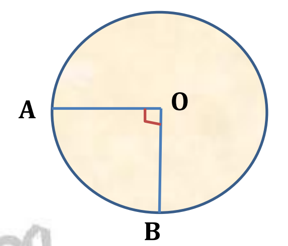
وتر الدائرة : هو قطعة مستقيمة طرفاها على الدائرة .

قطر الدائرة : هو وتر يمر بمركز الدائرة .

ملاحظة قياس القوس = قياس الزاوية المركزية المقابلة لها

مثال كيف اجد قياس القوس $\widehat{AB}$ بدلالة الزاوية المركزية المقابلة لها ؟

الحل : قياس القوس = قياس الزاوية المركزية المقابلة لها



$\widehat{AB} = m\angle AOB$, $m\angle AOB = 90^\circ$ لأنها قائمة

$\therefore \widehat{AB} = 90^\circ$ قياس القوس المقابل للزاوية AOB

هناك ثلاث انواع من الأقواس في الدائرة وهي :

القوس الأصغر (اصغر من 180)	القوس الأكبر (اكبر من 180)	قياس نصف دائرة (يساوي 180)
$m\widehat{AB} = m\angle AOB$	$m\widehat{ACB} = 360 - \widehat{AB}$	$m\widehat{AB} = 180$



مثال أوجد قياس الزوايا والأقواس المجهولة في الشكل المجاور :

الحل : قياس القوس = قياس الزاوية المركزية المقابلة لها

$1)\ \widehat{BC} : m\angle BOC = 30^\circ \implies m\widehat{AB} = m\angle BOC = 30^\circ$

$2)\ \widehat{DC} : m\angle COD = 90^\circ$ قائمة $\implies m\widehat{DC} = m\angle COD = 90^\circ$

$3)\ \widehat{BCD} : m\angle BoD = m\angle BOC + m\angle COD = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$

$m\widehat{BCD} = m\angle BoD = 120^\circ$

$4)\ \widehat{BEA} : m\angle AOB = 180^\circ$ مستقيمة $m\widehat{BEA} = m\angle AOB = 180^\circ$

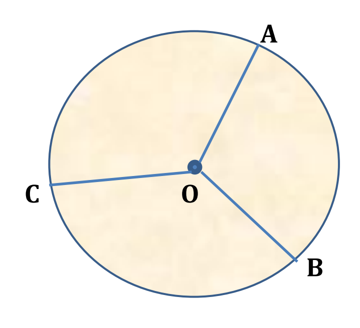
$5)\ \widehat{AD} : m\angle AOD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$m\widehat{AD} = m\angle AOD = 60^\circ$





مثال الدائرة المقابلة مقسمة الى ثلاث اجزاء متطابقة , جد قياس الأقواس الآتية : $\widehat{ABC}, \widehat{AB}$



الحل : قياس القوس = قياس الزاوية المركزية المقابلة لها

$1)\ \widehat{AB} : m\ \widehat{AB} = m\angle AOB\ , m\angle AOB = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

$\therefore m\widehat{AB} = 120^\circ$

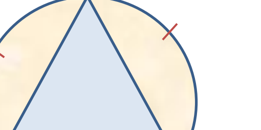
$2)\ \widehat{ABC} : m\widehat{ABC} = m\angle ABC\ \ , m\angle ABC = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$

$\therefore m\widehat{ABC} = 120^\circ$

مبرهنة الأقواس والاوتار والزاوية المركزية في كل دائرة أو في دائرتين متطابقتين		
اذا تطابقت زاويتان مركزيتان تطابق وتراها وبالعكس	$\angle 1 \cong \angle 2 \iff \overline{AB} \cong \overline{AC}$	
اذا تطابقت زاويتان مركزيتان تطابق قوساهما وبالعكس	$\angle 1 \cong \angle 2 \iff \widehat{AB} \cong \widehat{AC}$	
اذا تطابق قوسان تطابق وتراهما وبالعكس	$\overline{AB} \cong \overline{AC} \iff \widehat{AB} \cong \widehat{AC}$	



مثال استعمل مبرهنة الأقواس والاوتار لتبرهن أن المثلث ABC متساوي الاضلاع المقابلة علما ان : $\widehat{AB} \cong \widehat{AC} \cong \widehat{BC}$



الحل :

$\because \widehat{AB} \cong \widehat{AC} \cong \widehat{BC}$ معطى بالسؤال

$\therefore \overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$ مبرهنة الأقواس والاوتار

∴ المثلث ABC منتظم ((متساوي الاضلاع المقابلة)) .

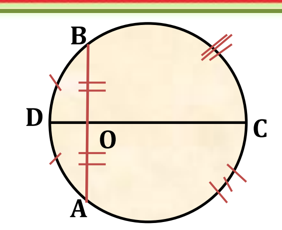
اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين


07703153998

مبرهنة القطر العمودي في كل دائرة

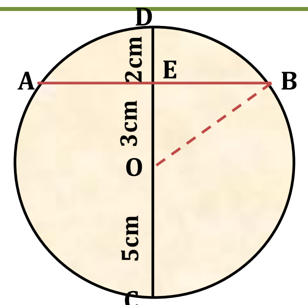
مبرهنة : القطر العمودي على وتر في دائرة ينصف الوتر وينصف كلا قوسيه .

$\overline{CD} \perp \overline{AB} \Rightarrow AO = BO , \widehat{AD} \cong \widehat{DB} , \widehat{BC} \cong \widehat{AC}$



مثال

استعمل مبرهنة القطر العمودي وجد طول الوتر AB اذا علمت ان نصف القطر OD يساوي 5cm وان $DE = 2cm$



الحل : ارسم نصف قطر $\overline{OC}$

$OC = OD = BO = 5cm , DE = 2cm$ معطى $\Rightarrow OE = 5 - 2 = 3cm$

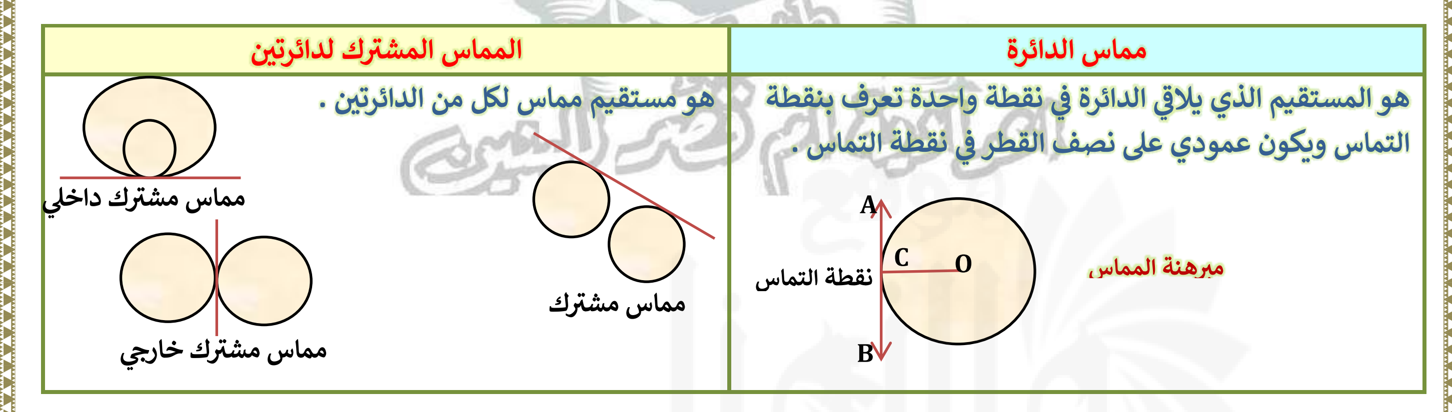
$(OB)^2 = (BE)^2 + (EO)^2$ مبرهنة فيثاغورس

$(25)^2 = (BE)^2 + (3)^2 \Rightarrow 25 = (BE)^2 + 9 \Rightarrow (BE)^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow BE = 4cm$

$\therefore AB = 2 \times BE = 2 \times 4 = 8cm$ E منتصف $\overline{AB}$ مبرهنة القطر العمودي

$\therefore$ القطر $\overline{DC}$ عمودي على الوتر $\overline{AB}$ وينصفه .

المماس



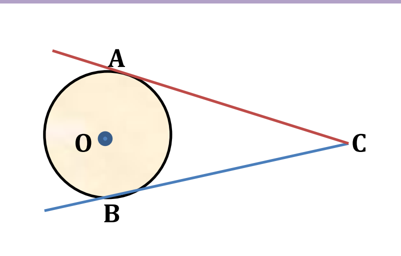
المماس المشترك لدائرتين	مماس الدائرة
هو مستقيم مماس لكل من الدائرتين .	هو المستقيم الذي يلاقي الدائرة في نقطة واحدة تعرف بنقطة التماس ويكون عمودي على نصف القطر في نقطة التماس .
مماس مشترك داخلي مماس مشترك مماس مشترك خارجي	مبرهنة المماس نقطة التماس A C O B

مبرهنة المماسين

مبرهنة : القطعتان المماستان المرسومتان لدائرة من نقطة خارجة عنها متطابقان .

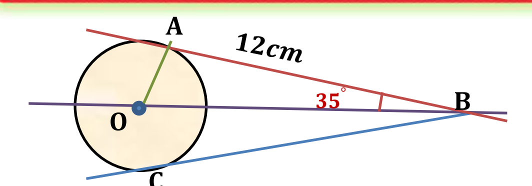
$\overline{CB} , \overline{CA}$ مماسان للدائرة من نقطة C

$\therefore \overline{CB} \cong \overline{CA}$



مثال

دائرة مركزها O في الشكل المجاور , $\overline{AB}$ هو مماس للدائرة في A وقياس الزاوية ABO يساوي 35° جد قياس الزاوية AOB ثم جد طول القطعة المستقيمة BC .



الحل : $\overline{BA}$ مماس الدائرة في النقطة A

$\overline{AB} \perp \overline{AO}$, $m\angle OAB = 90^\circ$ قائمة (مبرهنة المماس)

$\because m\angle ABO = 35^\circ$ (معطى)

$m\angle OBA + m\angle OAB + m\angle ABO = 180^\circ$ مجموع زوايا المثلث

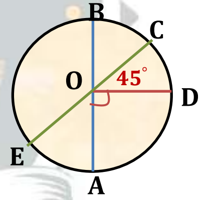
$m\angle OBA + 35^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow m\angle OBA + 125^\circ = 180^\circ$

$m\angle OBA = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$

$BC \cong BA \Rightarrow \therefore BC = 12cm$ (متطابقان عنها خارجة نقطة من لدائرة المرسومتان المماستان القطعتان)

تأكد من فهمك

في الدائرة ادناه , جد قياس الزوايا والاقواس فيما يأتي :








1 $\angle AOD$ 2 $\angle COB$ 3 $\widehat{CD}$
4 $\widehat{DBE}$ 5 $\widehat{DAB}$ 6 $\angle BOE$

الحل :

1 $m\angle AOD = 90^\circ$ لأنها قائمة

2 $m\angle COB = m\angle BOD - m\angle COD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

3 $m\widehat{CD} = m\angle COD = 45^\circ$

4 $m\widehat{DBE} = \angle COD + m\angle COB + mBOE = 45^\circ + 45^\circ + 135^\circ = 225^\circ$

5 $m\widehat{DAB} = m\angle DOA + m\angle AOE + m\angle EOB = 90^\circ + 45^\circ + 135^\circ = 270^\circ$

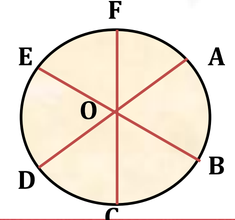
6 $m\angle BOE = 360^\circ - (m\angle DAB + m\angle AOE) = 360^\circ - (180^\circ + 45^\circ) = 360^\circ - 225^\circ = 135^\circ$

دائرة مقسمة الى 6 اجزاء متطابقة جد قياس كل قوس مما يأتي :





7 $\widehat{AB}$ 8 $\widehat{ABC}$
9 $\widehat{DAC}$ 10 $\widehat{ABD}$



الحل :

7 $m\widehat{AB} = m\angle AOB \quad , \quad m\angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ \quad \Rightarrow \therefore m\widehat{AB} = 60^\circ$

8 $m\widehat{ABC} = m\angle AOB + m\angle BOC = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

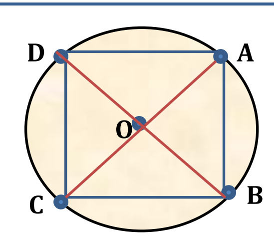
9 $m\widehat{DAC} = m\angle AOB + m\angle BOC + m\angle COD = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

10 $m\widehat{ABC} = m\angle AOB + m\angle BOC = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

---

11 الدائرة المجاورة مقسمة الى 4 اجزاء متطابقة .

برهن أن الشكل : ABCD مربع .

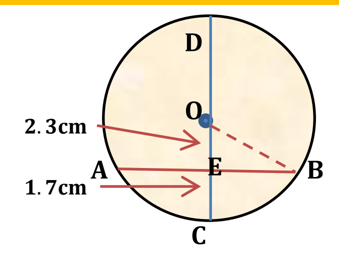


الحل : نصل بين ABCD $\leftarrow \quad \widehat{AB} = m\angle AOB = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$

$\therefore \widehat{AB} \cong \widehat{BC} \cong \widehat{CD} \cong \widehat{DA} \quad \Rightarrow \quad \therefore \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} \quad \Rightarrow$ ∴ الشكل ABCD مربع

---

12 في الشكل المجاور استعمل مبرهنة القطر العمودي وجد طول القطعة المستقيمة AB في الدائرة المجاورة .



الحل : ارسم نصف قطر $\overline{OD}$

$OB = OC = 2.3 + 1.7 = 4cm$

$(OB)^2 = (OE)^2 + (EB)^2$ مبرهنة فيثاغورس $\Rightarrow (4)^2 = (2.3)^2 + (EB)^2$

$16 = 5.29 + (EB)^2 \quad \Rightarrow (EB)^2 = 16 - 5.29 = 10.71 \Rightarrow EB = \sqrt{10.71} = 3.3cm$

$AB = 2 \times EB = 2 \times 3.3 = 6.6cm$ E منتصف $\overline{AB}$ مبرهنة القطر العمودي

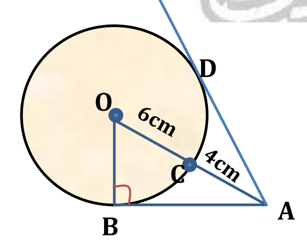
---

13 استعمل مبرهنة المماس لتجد طول القطع المستقيمة



$\overline{AB}$, $\overline{AD}$ في الشكل المجاور .





الحل : $\overline{AB}$ مماس للدارة في النقطة B

$\overline{OB} \perp \overline{AB} \quad , \quad m\angle ABO = 90^\circ$ قائمة (مبرهنة المماس)

$OB = OC = 6cm \, , OA = 6 + 4 = 10cm$

$(OA)^2 = (OB)^2 + (AB)^2$ مبرهنة فيثاغورس $\Rightarrow (10)^2 = (6)^2 + (AB)^2$

$100 = 36 + (AB)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow AB = 8cm$

$\overline{AB} \cong \overline{AD} \quad \Rightarrow \quad \overline{AD} = 8cm$ مبرهنة المماسين

تدرب وحل التمرينات

جد قياس الزوايا والأقواس فيما يأتي :

14 $\angle COA$ **15** $\widehat{DBE}$ **16** $\widehat{CA}$

17 $\widehat{BAC}$ **18** $\widehat{DCA}$ **19** $\angle AOE$

الحل :

14 $\angle COA = 180^\circ - (74^\circ + 40^\circ) = 180^\circ - 114^\circ = 66^\circ$

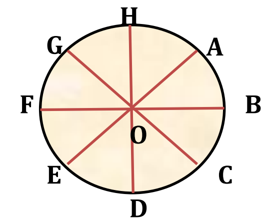
15 $m\widehat{DBE} = m\angle DOB + m\angle BOE = 180^\circ + 90^\circ = 270^\circ$

16 $m\widehat{CA} = m\angle COA = 66^\circ$

17 $m\widehat{BAC} = m\angle BOA + m\angle COA = 40^\circ + 66^\circ = 106^\circ$

18 $m\widehat{DCA} = m\angle DOC + m\angle COA = 74^\circ + 66^\circ = 140^\circ$

19 $m\angle AOE = m\angle AOB + m\angle BOE = 40^\circ + 90^\circ = 130^\circ$



الدائرة مقسمة الى 8 اجزاء متطابقة جد قياس كل قوس مما يأتي :



$\widehat{AB}$


$\widehat{ABC}$

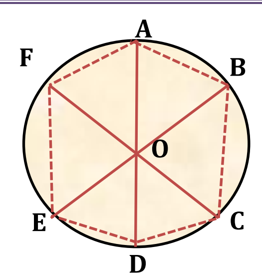

$\widehat{GDB}$

الحل :

20 $m\widehat{AB} = m\angle AOB = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$

21 $m\widehat{ABC} = m\angle AOB + m\angle BOC = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

22 $m\widehat{GDB} = m\angle GOB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$



23 الدائرة المجاورة مقسمة الى 6 اجزاء متطابقة برهن أن الشكل ABCDEF سداسي منتظم ؟

الحل : نصل بين ABCDEF

$$m\widehat{AB} = m\angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

$$\because \widehat{AB} \cong \widehat{BC} \cong \widehat{CD} \cong \widehat{DE} \cong \widehat{EF} \cong \widehat{FA}$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA}$$

$\therefore$ الشكل ABCDEF سداسي منتظم

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998



في الدائرة المجاورة استعمل مبرهنة القطر العمودي وجد طول القطعة المستقيمة AB .

الحل : ارسم نصف القطر $\overline{AO}$

$AO = OC = 3 + 2 = 5m$

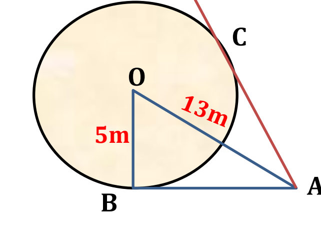
$(AO)^2 = (OE)^2 + (AE)^2$ مبرهنة فيثاغورس

$(5)^2 = (3)^2 + (AE)^2 \Rightarrow 25 = 9 + (AE)^2 \Rightarrow (AE)^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow AE = 4m$

$\therefore AB = 2 \times AE = 2 \times 4 = 8m$ E منتصف $\overline{AB}$ مبرهنة القطر العمودي

---

25 استعمل مبرهنة المماس لتجد طول القطع المستقيمة AB, AC في الدائرة المجاورة .



الحل :

$(AO)^2 = (OB)^2 + (AB)^2$ مبرهنة فيثاغورس

$(13)^2 = (5)^2 + (AB)^2 \Rightarrow 169 = 25 + (AB)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow AB = 12m$

$\because \overline{OB} \perp \overline{AB} \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{AC} \Rightarrow AC = 12m$

تدرب وحل مسائل حياتية



جغرافية (براكين) : ترتفع فوهة بركان (هولالاي) عن مستوى سطح البحر 2.52km احسب المسافة بين قمة البركان ومستوى الأفق اذا علمت ان نصف قطر الأرض 6437km تقريبا مقربا الناتج لأقرب كيلو متر .

الحل :

$(AB)^2 = (AO)^2 + (BO)^2$ مبرهنة فيثاغورس

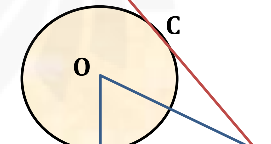
$(AB)^2 = (2.52)^2 + (6437)^2 = 6.4 + 41434969 = 41434975.4$

$AB = \sqrt{41434975.4} = 6437km$

---

27 محطة فضائية : تبعد محطة مير الروسية عن مستوى سطح البحر مسافة 390km تقريبا , كم تبلغ المسافة بين هذه المحطة والأفق مقربا الناتج الى اقرب كيلومتر .

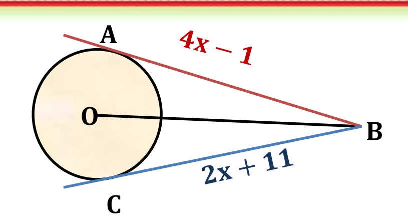
الحل :



$AB = 390km$

$\overline{OB} \perp \overline{AB} \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{AC} \Rightarrow AC = 390Km$







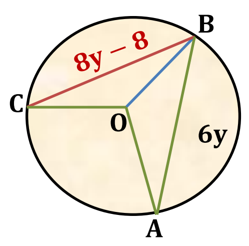
تحد : استعمل مبرهنة المماسين وجد طول $\overline{AB}$ في الدائرة المجاورة .

الحل :

$\because \overline{AB} \cong \overline{BC} \Rightarrow \therefore \overline{AB} = \overline{BC}$ مبرهنة المماسين

$4x - 1 = 2x + 11 \Rightarrow 4x - 2x = 1 + 11 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{2} = 6$

$\overline{AB} = 4x - 1 = 4(6) - 1 = 24 - 1 = 23$



29 **حس عددي :** اذا كانت الزاويتان COB, AOB متطابقتان جد طول $\overline{CB}$

في الدائرة المجاورة .

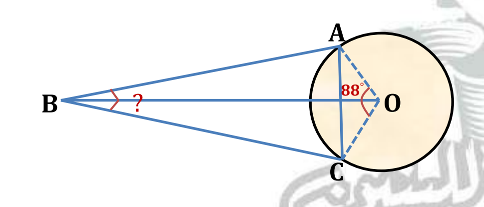
الحل :

$\because \angle COB \cong \angle AOB \Rightarrow \widehat{CB} \cong \widehat{AB} \Rightarrow \therefore \overline{CB} = \overline{AB}$

$8y - 8 = 6y \Rightarrow 8y - 6y = 8 \Rightarrow 2y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{2} = 4$

$\overline{CB} = 8y - 8 = 8(4) - 8 = 32 - 8 = 24$





الخطوات اللازمة لتجد قياس زاوية ABC في الرسم المجاور اذا

علمت ان $\overline{BO}$ ينصف الزاوية AOC والتي قياسها يساوي 88°

الحل : $\overline{BO}$ ينصف الزاوية AOC

$m\angle BAO = 90^\circ$ قائمة , $m\angle BCO = 90^\circ$ قائمة

$m\angle AOB = m\angle COB = \frac{88^\circ}{2} = 44^\circ$

$m\angle ABO + m\angle AOB + m\angle BAO = 180^\circ$ مجموع زوايا المثلث

$m\angle ABO + 44^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow m\angle ABO + 134^\circ = 180^\circ \Rightarrow m\angle ABO = 180^\circ - 134^\circ = 46^\circ$

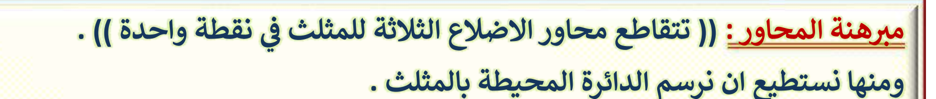
$m\angle CBO + m\angle COB + m\angle BCO = 180^\circ$ مجموع زوايا المثلث

$m\angle CBO + 44^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow m\angle CBO + 134^\circ = 180^\circ \Rightarrow m\angle CBO = 180^\circ - 134^\circ = 46^\circ$

$m\angle ABC = m\angle ABO + m\angle CBO = 46^\circ + 46^\circ = 92^\circ$

المثلث والدائرة , القطع المستقيمة والدائرة

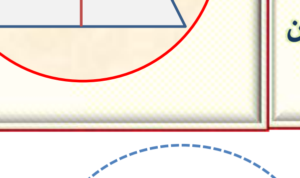
المثلث والدائرة



مبرهنة المحاور : ((تتقاطع محاور الاضلاع الثلاثة للمثلث في نقطة واحدة)) .
ومنها نستطيع ان نرسم الدائرة المحيطة بالمثلث .

الدائرة المحيطة : لكل مثلث دائرة واحدة تحيط به مركزها نقطة تقاطع المحاور الثلاثة .

المحاور : هي الأعمدة المقامة على اضلاع مثلث من منتصفاتها تلتقي بنقطة واحدة (O) تكون متساوية البعد عن رؤوسه وهذه النقطة هي مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث .



مثال جد نقطة تقاطع محاور المثلث ABC وارسم الدائرة المحيطة به ؟

الحل :

محور $\overline{AB}$ يمر في منتصف $\overline{AB}$ ويوازي $\overline{BC}$

محور $\overline{BC}$ يمر في منتصف $\overline{BC}$ ويوازي $\overline{AB}$ $\Leftarrow$ $\therefore$ المحاور الثلاثة تلتقي في منتصف $\overline{AC}$



يمكن الاستفادة من مبرهنة منصفات زوايا المثلث لرسم الدائرة المحاطة بمثلث

- تتقاطع منصفات زوايا المثلث في نقطة واحدة .
- نقطة تقاطع منصفات الزوايا تقع على المسافة نفسها من الاضلاع الثلاثة .

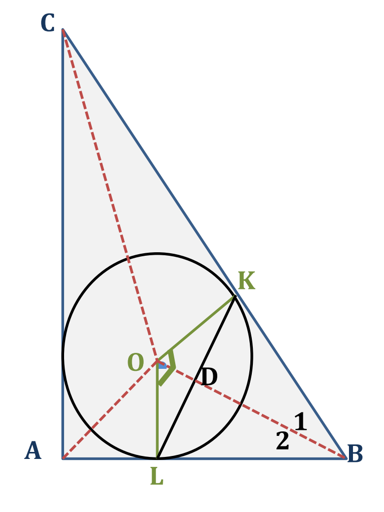
في كل مثلث توجد دائرة داخل المثلث مماسة لأضلاعه الثلاث وتسمى الدائرة المحاطة .

$$OL = OK = OM$$



مثال الدائرة التي مركزها O محاطة بالمثلث ABC

برهن أن $\overline{BO}$ منصف $\angle LOK$ ومحور $\overline{KL}$.



الحل : نصفا قطري الدائرة $OK = OL$, مبرهنة المماسين $BK = BL$

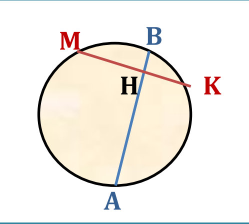
$\because$ المثلثان BOK, BOL متطابقان ومن التطابق : $m\angle 1 = m\angle 2$

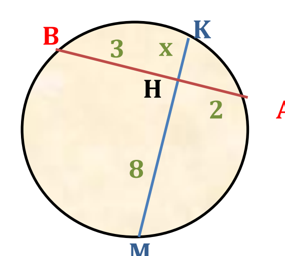
$\overline{BO}$ ينصف الزاوية LOK , $\overline{BO}$ محور $\overline{KL}$

المثلثان KDB, LDB متطابقان .

$\therefore$ $\overline{BO}$ محور $\overline{KL}$ $\Rightarrow$ $\overline{KL} \perp \overline{BO}$

القطع المستقيمة والدائرة

مبرهنة القاطعين في الدائرة	
المبرهنة	
اذا قطع مستقيمان متقاطعان دائرة تشكل على كل منهما قطعتان مستقيمتان ناتجي ضرب طوليها متساويان . $BH \times HA = MH \times HK$	



مثال جد قيمة x وطول كل وتر .

الحل :

مبرهنة القاطعين في الدائرة $BH \times HA = MH \times HK$

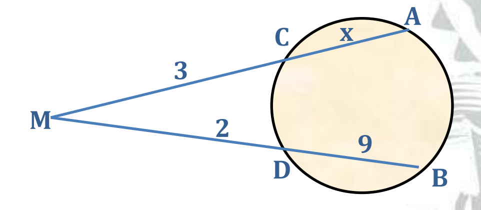
$3 \times 2 = 8 \times x \quad \Rightarrow \quad 8x = 6 \quad \Rightarrow x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

طول الوتر AB $\quad AB = AH + HB = 2 + 3 = 5$

طول الوتر MK $\quad MK = MH + HK = 8 + \frac{3}{4} = \frac{32+3}{4} = \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4}$



جد قيمة x وطول كل من $\overline{AM}, \overline{BM}$



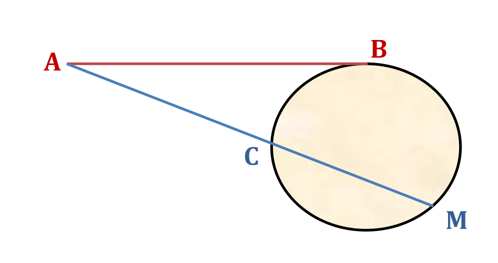
الحل :

مبرهنة القاطعين في الدائرة $AC \times CM = BD \times DM$

$x \times 3 = 9 \times 2 \quad \Rightarrow \quad 3x = 18 \quad \Rightarrow x = \frac{18}{3} = 6$

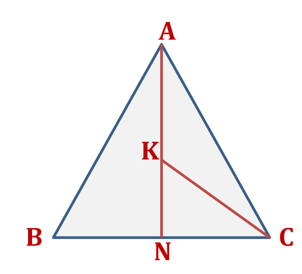
طول $\overline{AM}$ $\quad AM = AC + CM = 6 + 3 = 9$

طول $\overline{BM}$ $\quad BM = BD + DM = 9 + 2 = 11$

مبرهنة المماس والقاطع في الدائرة	
المبرهنة	
اذا تماس مستقيم مع دائرة وقطعها مستقيم اخر تشكلت على القاطع قطعتان مستقيمتان ناتج ضرب طوليهما يساوي مربع طول قطعة المماس . $AC \times CM = (AB)^2$	



جد طول قطعة المماس AB



الحل :

مبرهنة المماس والقاطع في الدائرة $AC \times CM = (AB)^2$

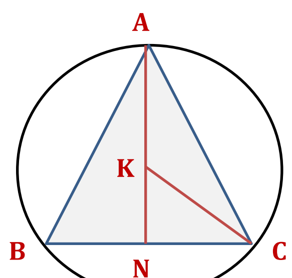
$3 \times 4 = (AB)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 12 \Rightarrow AB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

∴ طول قطعة المماس AB $AB = 2\sqrt{3}$

تأكد من فهمك



المثلث ABC متساوي الساقين $AB = AC$, N منتصف $\overline{BC}$, $\overline{KA} \cong \overline{KC}$
برهن ان K هي نقطة تقاطع محاور المثلث ABC . ثم ارسم الدائرة المحيطة به .



الحل :

محور $\overline{BC}$ يمر في منتصف $\overline{BC}$ ويوازي $\overline{AN}$

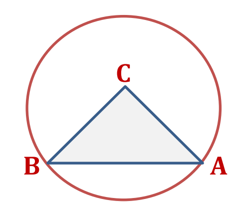
محور $\overline{AN}$ يمر في منتصف $\overline{AN}$ ويوازي $\overline{BC}$

∴ المحاور الثلاثة تلتقي في منتصف $\overline{AN}$



ABC مثلث منتظم طول ضلعه 12cm حدد نقطة تقاطع محاوره ثم ارسم الدائرة المحيطة به وجد طول قطرها .

الحل :



محور $\overline{AB}$ يمر في منتصف $\overline{AB}$ ويوازي $\overline{BC}$

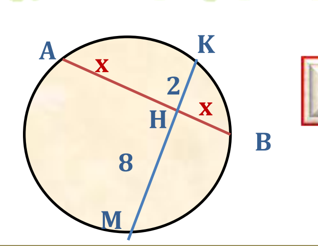
محور $\overline{BC}$ يمر في منتصف $\overline{BC}$ ويوازي $\overline{AB}$

$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$

القطر $= 2 \times \overline{AC} = 2 \times 12 = 24$

جد قيمة x وطول كل قطعة مجهولة :

3

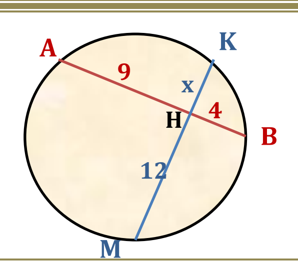


$AH \times HB = MH \times HK$ مبرهنة القاطعين في الدائرة

$(x) \times (x) = 8 \times 2$

$x^2 = 16 \Rightarrow x = \sqrt{16} \Rightarrow x = 4$

4

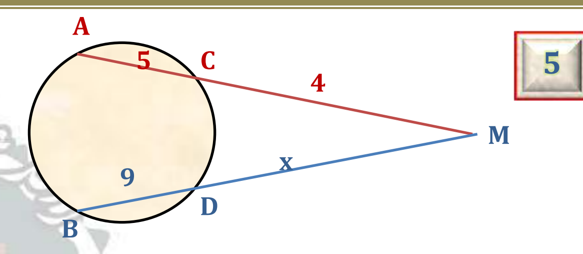


$AH \times HB = MH \times HK$ مبرهنة القاطعين في الدائرة

$9 \times 4 = 12 \times x$

$12x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{12} = 3$

5

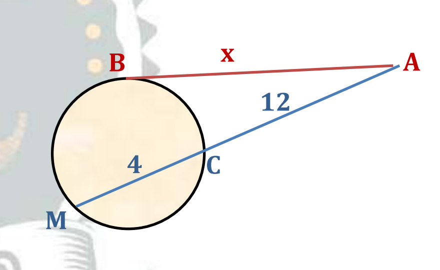


$MC \times CA = MD \times DB$ مبرهنة القاطعين في الدائرة

$4 \times 5 = x \times 9$

$9x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{9} = 2.2$

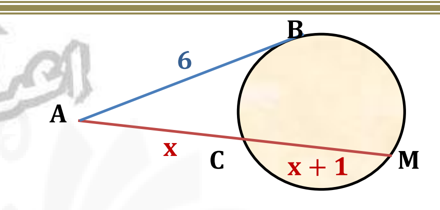
جد قيمة x :



$AC \times CM = (AB)^2$ مبرهنة المماس والقاطع في الدائرة

$12 \times 4 = x^2$

$x^2 = 48 \Rightarrow x = \sqrt{48} \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$



$AC \times CM = (AB)^2$ مبرهنة المماس والقاطع في الدائرة

$x(x+1) = (6)^2 \Rightarrow x^2 + x = 36$

$x^2 + x - 36 = 0 \Rightarrow a = 1 , b = 1 , c = -36$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-36)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 144}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{145}}{2}$$

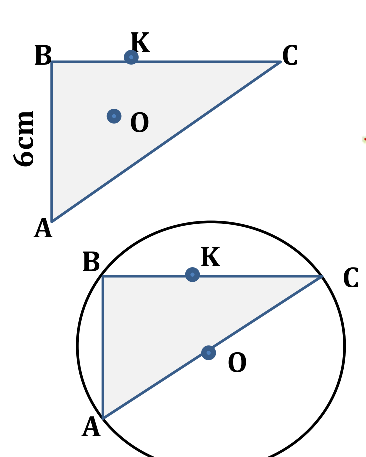
أما $x = \frac{-1+\sqrt{145}}{2}$ أو $x = \frac{-1-\sqrt{145}}{2}$ يهمل

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998

تدرب وحل التمرينات



ABCمثلث قائم متساوي الساقين وطول كل من ساقيه 6cm ارسم الدائرة التي يحيط بها المثلث ABC . وجد طول $\overline{BK}$, O نقطة التقاء منصفات زوايا المثلث ABC



الحل :

محور $\overline{BC}$ يمر في منتصف $\overline{Bc}$ ويوازي $\overline{AB}$

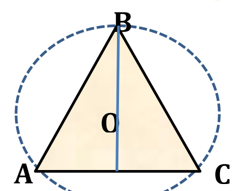
محور $\overline{AB}$ يمر في منتصف $\overline{AB}$ ويوازي $\overline{BC}$ ⟸ المحاور الثلاث تلتقي في منتصف $\overline{AC}$

$$AB = BC = AC = 6cm$$

$$BK = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3} \times 6 = 2cm$$



ABC مثلث قائم متساوي الساقين وتره $\overline{BC}$ حدد نقطة تقاطع محاور هذا المثلث وارسم الدائرة المحيطة به ؟

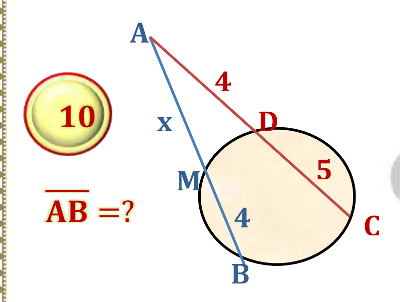


الحل :

محور $\overline{AC}$ يمر في منتصف $\overline{AC}$ ويوازي $\overline{AB}$

محور $\overline{AB}$ يمر في منتصف $\overline{AB}$ ويوازي $\overline{AC}$ ⟸ المحاور الثلاث تلتقي في منتصف $\overline{BC}$

جد قيمة x وطول القطع المستقيمة المجهولة :



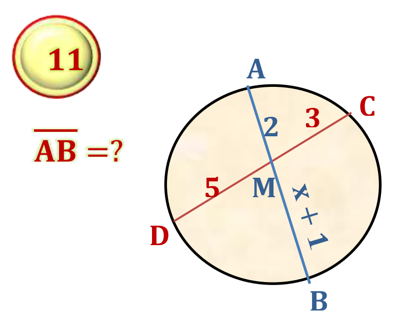
$\overline{AB} = ?$

الحل :

$AM \times MB = AD \times DC$ مبرهنة القاطعين في الدائرة

$$x \times 4 = 4 \times 5 \quad \Rightarrow 4x = 20 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{20}{4} = 5$$

$$\overline{AB} = x + 4 = 5 + 4 = 9$$



$\overline{AB} = ?$

الحل :

$AM \times MB = DM \times MC$ مبرهنة القاطعين في الدائرة

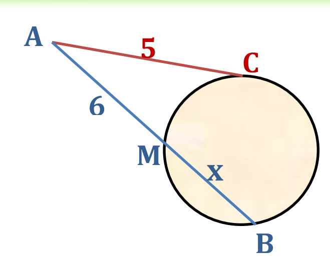
$$2(x + 1) = 5 \times 3 \quad \Rightarrow 2x + 2 = 15$$

$$2x = 15 - 2 \quad \Rightarrow \quad 2x = 13 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{13}{2}$$

$$\overline{AB} = 2 + x + 1 = 3 + \frac{13}{2} = \frac{6 + 13}{2} = \frac{19}{2} = 9.5$$

07703153998 اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين





$\overline{AB} = ?$

الحل : مبرهنة القاطعين في الدائرة $AM \times MB = (AC)^2$

$$6 \times x = (5)^2 \Rightarrow 6x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{6}$$

$$\overline{AB} = 6 + x = 6 + \frac{25}{6} = \frac{36+25}{6} = \frac{61}{6} = 10.2$$





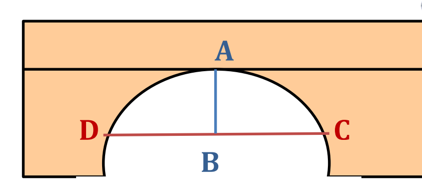


الحل : مبرهنة القاطعين في الدائرة $AM \times MC = (AB)^2$

$$3 \times 9 = (x)^2 \Rightarrow x^2 = 27 \Rightarrow x = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\overline{AB} = x = 3\sqrt{3}$$

تدرب وحل مسائل حياتية





بناء : يرتكز جسر على قوس دائرة كما مبين في الشكل المقابل

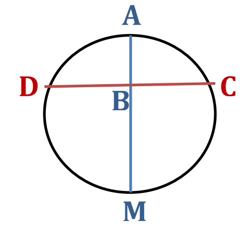


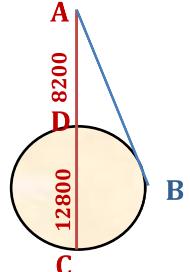
الحل : $DB = BC = 75m$

مبرهنة القاطعين في الدائرة $AB \times BM = DB \times BC$

$$60 \times BM = 75 \times 75 \Rightarrow 60 \times BM = 5625 \Rightarrow BM = \frac{5625}{60} = 93.75$$

قطر الدائرة $AM = AB + BM = 60 + 93.75 = 153.75m$





15

فضاء : قمر صناعي يدور حول الأرض على ارتفاع 8200km اذا كان قطر الأرض 12800km تقريبا , كم المسافة التي تفصل القمر الصناعي عن النقطة B في الشكل المجاور .

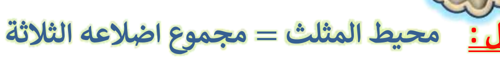
الحل :

مبرهنة القاطعين في الدائرة $AD \times DC = (AB)^2$

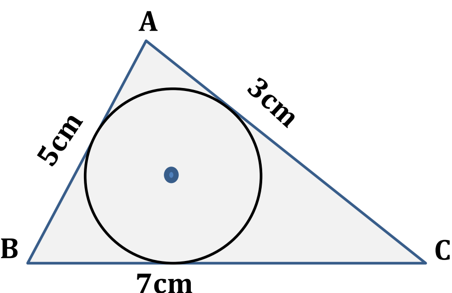
$$8200 \times 12800 = (AB)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 104960000$$

$$AB = \sqrt{104960000} \approx 10250km$$

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين  07703153998

16 هندسة : O نقطة تقاطع محاور المثلث ABC جد محيط المثلث ABC مستعملا الشكل المجاور ؟



الحل : محيط المثلث = مجموع اضلاعه الثلاثة

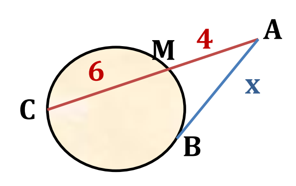
$P = AB + BC + AC$

$P = 5 + 7 + 3 = 15cm$ المحيط





17 اكتشف الخطأ: فيما يلي حلان لإيجاد قيمة x في الشكل المقابل ايهما الحل الخطأ برر اجابتك :



i) $4 \times 6 = x^2$ مبرهنة المماس والقاطع

$24 = x^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{6}$

ii) $x^2 = 10 \Rightarrow x = \sqrt{10}$

الحل :

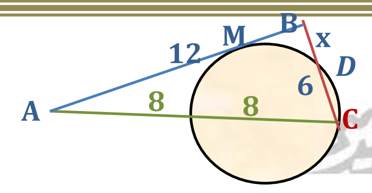
$AM \times MC = (AB)^2$ مبرهنة القاطعيت في الدائرة

$4 \times 6 = x^2 \Rightarrow x^2 = 24 \Rightarrow x = \sqrt{24} \Rightarrow x = 2\sqrt{6}$

الاجابة الخاطئة هي الثانية (ii)



18 تحد : في الشكل المقابل $AB = 12$ وهو مماس للدائرة جد قيمة x ؟



الحل :

$MB = 12 - x$

$AD \times DC = (BM)^2$ مبرهنة القاطعين في الدائرة

$(6)(x) = (12 - x)^2 \Rightarrow 6x = 144 - 24x + x^2$

$144 - 24x + x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x^2 - 30x + 144 = 0 \Rightarrow (x - 24)(x - 6) = 0$

اما $x - 24 = 0 \Rightarrow x = 24$ او $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$



19 **مسألة مفتوحة :** في الشكل المجاور دائرة مركزها O , $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{BD}$ مماسات للدائرة جد طول القطعة BC

الحل : $\overline{BD}, \overline{BE}$ مماسان للدائرة .

$\overline{BD} \cong \overline{BE} \quad \Rightarrow \quad \overline{BD} = \overline{BE} = 13$

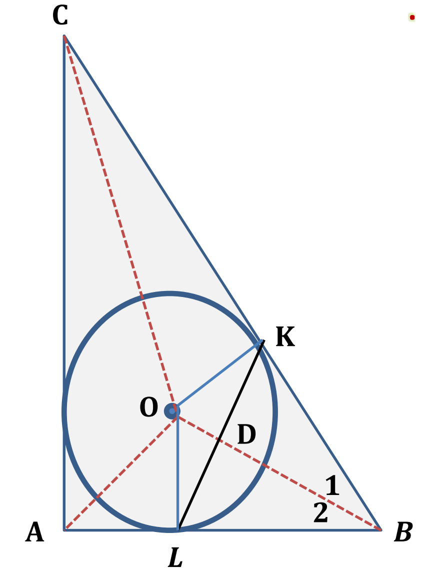
$\overline{AC}, \overline{CE}$ مماسان للدائرة

$\overline{AC} \cong \overline{CE} \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = \overline{CE} = 10$

$BC = BE + CE = 13 + 10 = 23$

اكتب


مسألة تستعمل فيه المحاور ومنصفات الزوايا لمثلث في رسم دائرة محيطة به .



الدائرة التي مركزها O محاطة بالمثلث ABC

برهن أن $\overline{BO}$ منصف $\angle LOK$ ومحور $\overline{KL}$.

نصفا قطري الدائرة $OK = OL$, مبرهنة المماسين $BK = BL$

$\because$ المثلثان BOK, BOL متطابقان ومن التطابق : $m\angle 1 = m\angle 2$

$\overline{BO}$ ينصف الزاوية LOK , $\overline{BO}$ محور $\overline{KL}$

المثلثان KDB, LDB متطابقان .

$\therefore$ $\overline{BO}$ محور $\overline{KL} \Rightarrow \overline{KL} \perp \overline{BO}$

الزاوية والدائرة

الزاوية المحيطية

الزاوية المحيطية : هي الزاوية التي رأسها نقطة من نقاط الدائرة وضلعاها وتران في الدائرة .

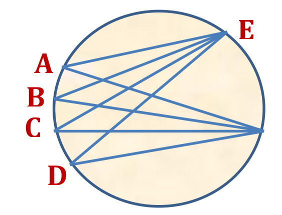
مبرهنة الزوايا المحيطية	
قياس الزاوية المحيطية تساوي قياس القوس المواجه لها . $m\angle B = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$	B A C

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998



جد قياس الزوايا المحيطية التالية في الشكل المجاور

$i)\ \angle D \qquad ii)\ \angle BAD$



الحل :

$i)\ m\angle D = \frac{1}{2} m\widehat{EA}$ مبرهنة الزوايا المحيطية

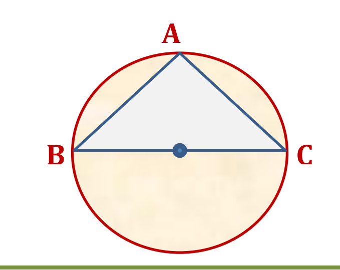
$m\angle D = \frac{1}{2} \times 140 = 70$

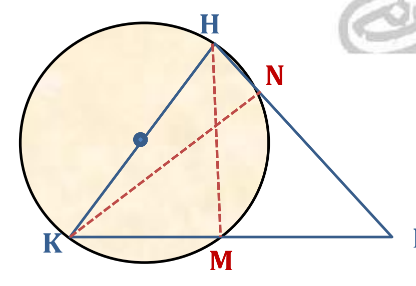
$\therefore m\angle D = 70^\circ$

$ii)\ m\angle BAD = \frac{1}{2} m\widehat{BD}$

$m\angle BED = \frac{1}{2} m\widehat{BD}$

$\therefore m\angle BED = m\angle BAD = 30^\circ$

مبرهنة الزوايا المحيطية المواجهة للقوس نفسه	
كل الزوايا المحيطية التي تواجه قوسا مشتركا على الدائرة تتطابق . $m\angle A \cong m\angle B \cong m\angle C \cong m\angle D = m\widehat{EF}$	

ملاحظة	
هنالك حالة خاصة للزاوية المحيطية عندما تكون زاوية قائمة : ■ كل زاوية محيطية تواجه نصف دائرة تكون قائمة . ■ كل زاوية محيطية تواجه قطرا تكون قائمة . ■ كل زاوية محيطية قائمة تواجه قطرا . $m\angle A = m\widehat{BC} = 90^\circ$	



دائرة قطرها $\overline{KH}$ تقطع $\overline{HL}$ في N وتقطع $\overline{KL}$ في M كما في الشكل المجاور .

برهن أن $\overline{KN}$ و $\overline{HM}$ ارتفاعات في المثلث HKL .

الحل :

$\because m\angle HNK$ زاوية محيطية تواجه القطر $\overline{KH}$

$\therefore m\angle HNK = 90^\circ$ قائمة

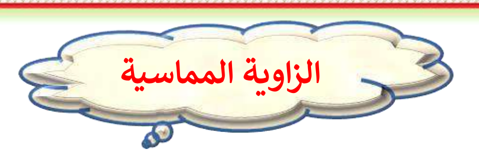
$\therefore \overline{KN}$ ارتفاع في المثلث HKL

$\because m\angle HMK$ زاوية محيطية تواجه القطر $\overline{KH}$

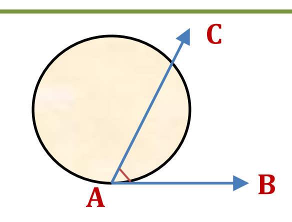
$\therefore m\angle HMK = 90^\circ$ قائمة

$\therefore \overline{KM}$ ارتفاع في المثلث HKL

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين  07703153998

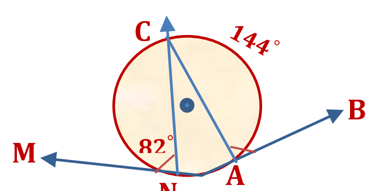


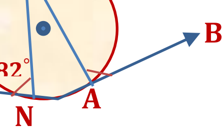
الزاوية المماسية : هي الزاوية التي يشكلها مماس الدائرة مع مستقيم اخر يمر في نقطة التماس .

مبرهنة الزوايا المماسية اذا تقاطع مماس الدائرة مع مستقيم يمر في نقطة التماس يكون قياس الزاوية بينهما نصف قياس القوس المقتطع . $m\angle A = \frac{1}{2} m\widehat{AC}$	

مثال باستعمال مبرهنة الزوايا المماسية والشكل المجاور جد قياس كل مما يأتي :

ii) $\widehat{NA}$ i) $\angle A$





الحل :

$2) m\angle CNM = \frac{1}{2} m\ \widehat{CN}$ مبرهنة الزوايا المماسية

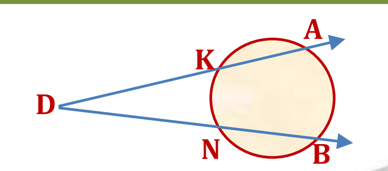
$82^\circ = \frac{1}{2} m\ \widehat{CN}$ الطرفين في الوسطين

$m\ \widehat{CN} = 2 \times 82^\circ = 164^\circ$

$i)\ m\angle A = \frac{1}{2} m\ \widehat{CA}$ مبرهنة الزوايا المماسية

$m\angle A = \frac{1}{2} \times 144 = 72^\circ$

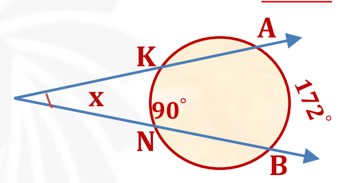


مبرهنة الزوايا الخارجية في الدائرة اذا تقاطع مستقيمان خارج دائرة فقياس الزاوية بينهما يساوي نصف الفرق بين قياس القوسين المقتطعين . $m\angle D = \frac{1}{2}(m\ \widehat{AB} - m\ \widehat{KN})$	

مثال جد قياس الزاوية الخارجية x في كل مما يأتي :

i) باستعمال مبرهنة الزاوية الخارجية في الدائرة وبالتعويض عن قيمة الاقواس في الرسم نجد قياس الزاوية x .

الحل :

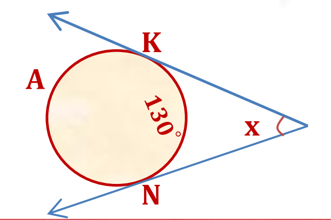


$m\angle x = \frac{1}{2}(m\ \widehat{AB} - m\ \widehat{KN}) = \frac{1}{2}(172^\circ - 90^\circ)$

$\therefore\ m\angle x = \frac{1}{2} \times 82^\circ = 41^\circ$

ii) باستعمال مبرهنة الزاوية الخارجية في الدائرة وبالتعويض عن قيمة $\widehat{KAN}$ بـ 360° نجد قياس الزاوية x .

الحل :



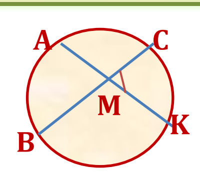
$m\angle x = \frac{1}{2}(m\ \widehat{KAN} - m\ \widehat{KN}) = \frac{1}{2}(360^\circ - 130^\circ)$

$\therefore\ m\angle x = \frac{1}{2} \times 230^\circ = 115^\circ$



اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

مبرهنة الزوايا الداخلية في دائرة

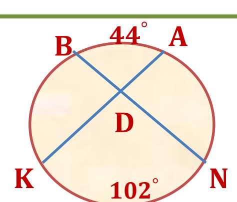


اذا تقاطع مستقيمان داخل دائرة فقياس الزاوية بينهما يساوي نصف مجموع قياس القوسين المقتطعين .

$$m\angle CMK = \frac{1}{2}(m\,\widehat{CK} + m\,\widehat{AB})$$



جد قياس $\angle ADB$ مستعملا مبرهنة الزاوية الداخلية في الدائرة .

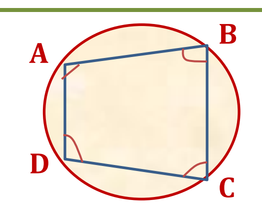


الحل :

$m\angle ADB = \frac{1}{2}(m\,\widehat{KN} + m\,\widehat{AB})$ مبرهنة الزاوية الداخلية في دائرة

$\therefore m\angle ADB = \frac{1}{2}(102^\circ + 44^\circ) = \frac{1}{2} \times 146^\circ = 73^\circ$

مبرهنة الرباعي الدائري



في كل رباعي دائري مجموع قياس كل زاويتين متقابلتين يساوي 180°

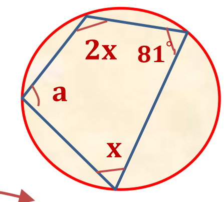
$m\angle A + m\angle C = 180^\circ$

$m\angle B + m\angle D = 180^\circ$



جد قيمة x, a في الشكل المجاور .





الحل :

$\because x + 2x = 180^\circ$ مبرهنة الرباعي الدائري

$3x = 180^\circ \Rightarrow \therefore x = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

$\because a + 81^\circ = 180^\circ$ مبرهنة الرباعي الدائري

$\therefore a = 180^\circ - 81^\circ = 99^\circ$



جد قياس كل مما يأتي :

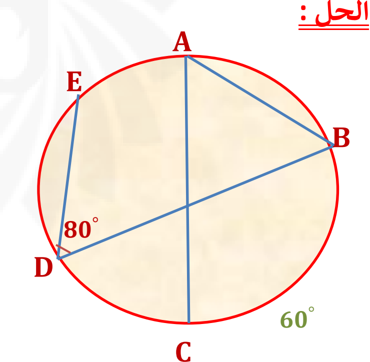


$m\,\widehat{BC}$



$m\angle CAB$

الحل :





$m\,\widehat{BC} = 60^\circ$

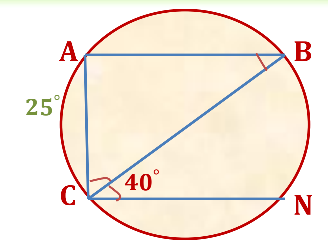


$m\angle CAB = \frac{1}{2}\,m\,\widehat{BC}$ مبرهنة الزاوية المحيطية

$\therefore m\angle CAB = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 15^\circ$

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

 $m\angle ABC$  $m\angle ACB$  $m\widehat{BN}$



الحل :

 $m\angle ABC = \frac{1}{2} m\,\widehat{AC}$ مبرهنة الزاوية المحيطية

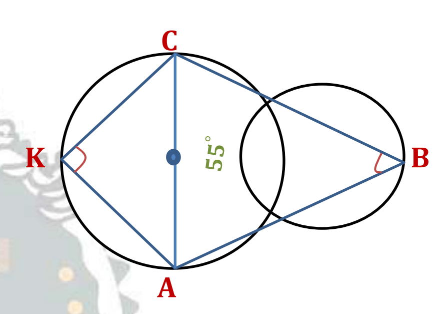
$\therefore m\angle ABC = \frac{1}{2} \times 25^\circ = 12.5^\circ$

 $m\angle ACB = m\angle ABC = 12.5^\circ$

 $m\angle BCN = \frac{1}{2} m\,\widehat{BN}$ مبرهنة الزاوية المحيطية

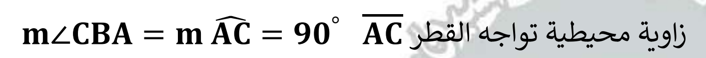
$40^\circ = \frac{1}{2} m\,\widehat{BN} \implies m\,\widehat{BN} = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$

 $m\angle CKA$ 



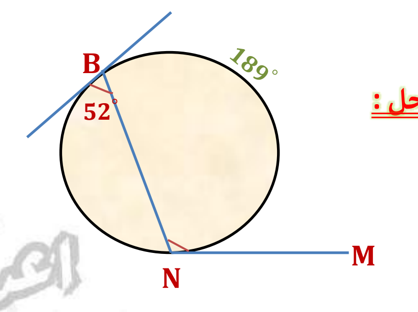
الحل :

 $m\angle CKA = m\,\widehat{AC} = 90^\circ$ زاوية محيطية تواجه القطر $\overline{AC}$





8 $m\angle MNB$ 9 $m\,\widehat{BN}$



الحل :

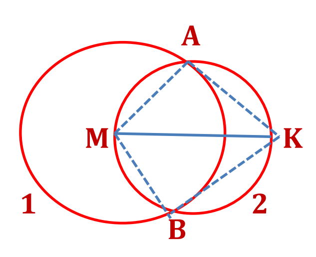
 $m\angle MNB = \frac{1}{2}\, m\,\widehat{BN}$ مبرهنة الزوايا المماسية

$\therefore m\angle MNB = \frac{1}{2} \times 189^\circ = 94.5^\circ$

 $m\,\widehat{BN} = 189^\circ$

10 اذا علمت أن M مركز الدائرة 1 و $\overline{MK}$ هو قطر الدائرة 2

برهن أن : $\overline{KB}$ و $\overline{KA}$ هما مماسان للدائرة 1



الحل :

$\therefore \angle KAM$ زاوية محيطية تواجه القطر $\overline{MK}$

$\therefore \angle KAM = 90^\circ$ قائمة

$\therefore \angle KBM$ زاوية محيطية تواجه القطر $\overline{MK}$

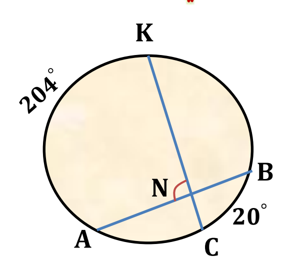
$\therefore \angle KBM = 90^\circ$ قائمة $\implies \overline{KA} = \overline{KB} \implies$ $\overline{KA}, \overline{KB}$ هما مماسان للدائرة 1

جد قياس كل مما يأتي :



$m\angle KNA$

الحل :



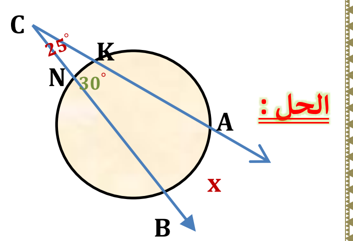
$m\angle KNA = \frac{1}{2}\left(m\,\widehat{AK} + m\,\widehat{BC}\right)$ مبرهنة الزاوية الداخلية في دائرة

$\therefore m\angle KNA = \frac{1}{2}(204^\circ + 20^\circ) = \frac{1}{2} \times 224^\circ = 112^\circ$



$m\,\widehat{X}$

الحل :



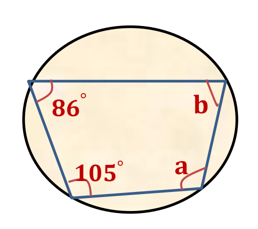
$m\angle C = \frac{1}{2}\left(m\,\widehat{AB} - m\,\widehat{KN}\right)$ مبرهنة الزاوية الخارجية في دائرة

$25^\circ = \frac{1}{2}\left(m\,\widehat{X} - 30^\circ\right) \} \times 2 \Rightarrow 50^\circ = m\,\widehat{X} - 30^\circ$

$m\,\widehat{X} = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ$

13 $m\angle b\, ,\, m\angle a$

الحل :



$\therefore \angle a + 86^\circ = 180^\circ$ مبرهنة الرباعي الدائري

$\therefore \angle a = 180^\circ - 86^\circ = 94^\circ$

$\therefore \angle b + 105^\circ = 180^\circ$ مبرهنة الرباعي الدائري

$\therefore \angle b = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$



جد قياس كل مما يأتي :

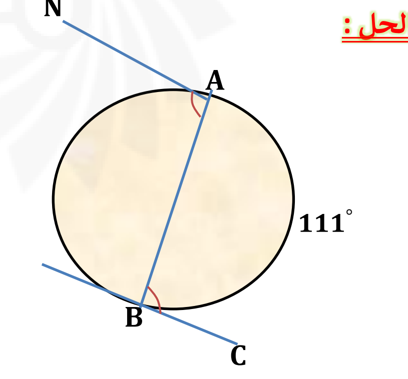


$m\angle ABC$



$m\angle NAB$

الحل :





$m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{AB} = \frac{1}{2} \times 111^\circ = 55.5^\circ$



$m\angle NAB = \frac{1}{2} m\widehat{AB}$

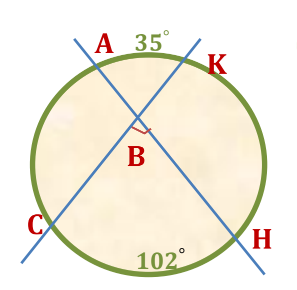
$m\angle ABC = \frac{1}{2} m\widehat{AB}$

$\therefore m\angle NAB = m\angle ABC = 55.5^\circ$



$m\angle HBC$

الحل :



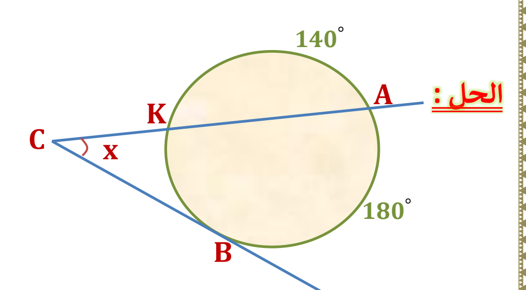
$m\angle HBC = \frac{1}{2}(m\,\widehat{HC} + m\,\widehat{AK})$ مبرهنة الزاوية الداخلية في دائرة

$\therefore m\angle HBC = \frac{1}{2}(102^\circ + 35^\circ) = \frac{1}{2} \times 137^\circ = 68.5^\circ$



$m\angle X$

الحل :



$m\angle C = \frac{1}{2}(m\,\widehat{AB} - m\,\widehat{KB})$ مبرهنة الزاوية الخارجية في دائرة

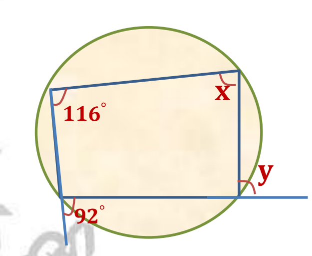
$m\,\widehat{KB} = 360^\circ - (180^\circ + 140^\circ) = 360^\circ - 320^\circ = 40^\circ$

$m\angle X = \frac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = \frac{1}{2} \times 140^\circ = 70^\circ$



$m\angle x \;,\; m\angle y$

الحل :



$x + x = 180^\circ$ مبرهنة الرباعي الدائري

$2x = 180^\circ \Rightarrow x = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

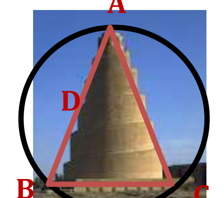
$m\angle y = 92^\circ$ بالتبادل

تدرب وحل مسائل حياتية



اثار : تمثل الصورة المجاورة بناية الملوية (من الأعلى) في سامراء يقف زائر عند النقطة A وينظر الى الموقع D, B بحيث يستقيم خط النظر عبر هذين النقطتين , مع نقطتين تشكلان قطر للدائرة التي تمثلها قاعدة الملوية اذا كان $\widehat{BC} = 57^\circ$ فكم قياس $\angle BAC$ ؟

الحل :

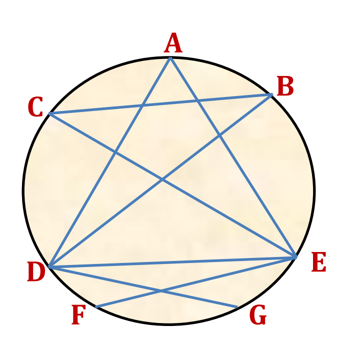


$m\angle BAC = \frac{1}{2} m\widehat{BC}$

$m\angle BAC = \frac{1}{2} \times 57^\circ = 28.5^\circ$

20 زجاج : رسم احد الفنانين الرسم المجاور على زجاج جد قياس $\angle ADE$ اذا علمت ان : $\angle BCE = 30^\circ$ وقياس $\widehat{AB} = 42^\circ$

الحل :



$\angle BCE = \frac{1}{2}\widehat{BE}$ مبرهنة الزاوية المحيطية

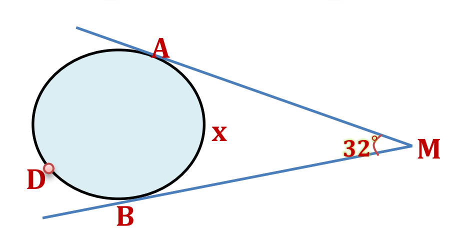
$30^\circ = \frac{1}{2}\widehat{BE} \Rightarrow \widehat{BE} = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$

$\angle ADE = \frac{1}{2}\widehat{AE}$ مبرهنة الزاوية المحيطية

$\angle ADE = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{BC})$

$\angle ADE = \frac{1}{2}(42^\circ + 60^\circ) = \frac{1}{2} \times 102^\circ = 51^\circ$

21 فضاء : قمر صناعي يدور حول الأرض عندما يصل النقطة M يكون ارتفاع 14000KM فوق الارض . ما القياس بالدرجة للقوس الذي يمكن رؤيته من كاميرا القمر الصناعي على الأرض ؟



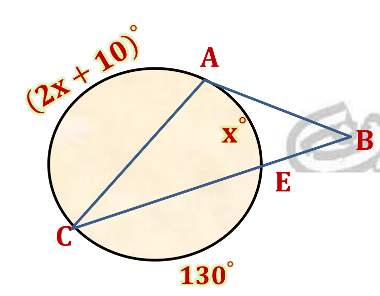
الحل :

$m\angle M = \frac{1}{2}(m\,\widehat{ADB} - m\,\widehat{AB})$

$32^\circ = \frac{1}{2}(360^\circ - x) \Rightarrow 64^\circ = 360^\circ - x \Rightarrow x = 360^\circ - 64^\circ = 296^\circ$

فكر

22 اكتشف الخطأ : كتب سعيد $\angle CAB = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ$ بين الخطأ وجد الجواب الصحيح .



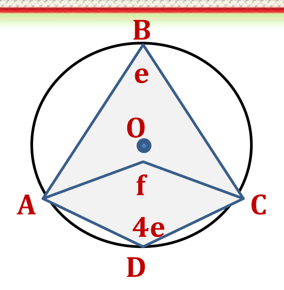
الحل :

$2x + 10 + x + 130^\circ = 360^\circ \Rightarrow 3x + 140^\circ = 360^\circ \Rightarrow 3x = 360^\circ - 140^\circ$

$3x = 220^\circ \Rightarrow x = \frac{220^\circ}{3} = 73.3^\circ$

$\angle CAB = \frac{1}{2} m\widehat{AC} = \frac{1}{2}(130^\circ + 73.3^\circ) = \frac{1}{2} \times 203.3^\circ = 101.65^\circ$

23 حس عددي : جد قيمة الزوايا المجهولة :



الحل :

$e + 4e = 180^\circ$ مبرهنة الرباعي الدائري

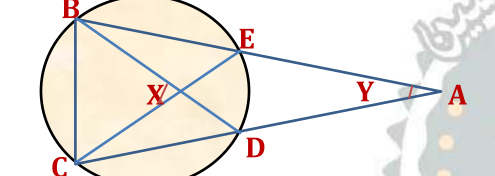
$5e = 180^\circ \Rightarrow e = \dfrac{180^\circ}{5} = 36^\circ$

$f + 4e = 180^\circ$ مبرهنة الرباعي الدائري

$f + 4(36^\circ) = 180^\circ \Rightarrow f + 144^\circ = 180^\circ$

$f + 144^\circ = 180^\circ \Rightarrow f = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$

اكتب كيف تستعمل مبرهنات الزوايا الداخلية والخارجية لتقارن بين الزاويتين X, Y



الحل :

تستعمل مبرهنة الزاوية الداخلية اذا تقاطع مستقيمان داخل دائرة فقياس الزاوية بينهما يساوي نصف مجموع قياس القوسين المقتطعين .

$$m\angle Y = \frac{1}{2}\left(m\,\widehat{BE} + m\,\widehat{CD}\right)$$

تستعمل مبرهنة الزاوية الخارجية اذا تقاطع مستقيمان خارج دائرة فقياس الزاوية بينهما يساوي نصف الفرق بين القوسين المقتطعين .

$$m\angle X = \frac{1}{2}\left(m\,\widehat{BC} - m\,\widehat{DE}\right)$$

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998



خطة حل المسألة (الرسم)

مثال لكل شعبة من شعب الصف الثالث المتوسط مقاعد دراسية متساوية وكان في شعبة (أ) يجلس الطالب ياسر في المقعد الرابع من الامام وفي المقعد الثاني من الخلف و المقعد الخامس من اليسار والثاني من اليمين , ارسم شكلا لإيجاد عدد المقاعد في الشعبة (أ) التي يجلس فيها ياسر .

الحل :

عدد المقاعد في الشعبة (أ) = $6 \times 5 = 30$

مسائل

حل المسائل التالية باستراتيجية (تحديد معقولية الاجابة) :

1 مسرح مقسم الى عدة اقسام جلس انمار في الصف الرابع من الامام وفي الصف السادس من الخلف وكان مقعده الثاني من جهة اليسار والسادس من جهة اليمين . فما عدد المقاعد في هذا القسم من المسرح ؟

الحل :

عدد المقاعد في الشعبة (أ) = $9 \times 7 = 63$

2 خزان ماء سعته 500 لترا يصب فيه ماء بمقدار 80 لترا كل 6 دقائق . ما عدد الدقائق اللازمة لملء الخزان ؟

الحل : نفرض عدد الدقائق اللازمة لملء الخزان t

$$t = \frac{500}{80} \times 6 = 6.25 \times 6 = 37.5 \text{ min}$$



3 تم تشكيل هرم رباعي القاعدة باستعمال كرات صغيرة كما في الشكل المجاور
اذا كان الهرم مكونا من خمس طبقات . ما عدد كرات الهرم ؟

الحل :

عدد الكرات $= 16 \times 5 = 80$ كرة

4 يستغرق قص قطعة من الخشب الى 5 قطع متساوية 20 دقيقة . ما الزمن اللازم لقص قطعة اخرى مشابهة الى 3 قطع متساوية ؟

الحل :

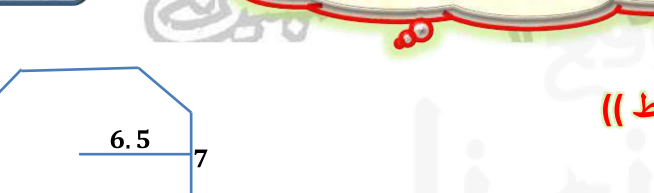
عدد دقائق القطعة الواحدة $= \frac{20}{5} = 4$ دقيقة

الزمن اللازم لقص قطعة مشابهة $= 3 \times 4 = 12$ دقيقة

صفحة 103



المضلعات والمجسمات ((الهرم والمخروط))



اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

1 محيط ثماني منتظم المجاور ؟

 a) 45.5cm  b) 48cm c) 38.3cm  d) 56cm

الحل :

$n = 8 \quad , \quad L = 7$

$P = n \times L = 8 \times 7 = 56\text{cm}$

2 مساحة الثماني المنتظم في السؤال (1) هو :

 $130cm^2$  $54cm^2$  $182cm^2$  $120cm^2$

الحل : $n = 8 \;,\; L = 7cm \;,\; H = 6.5cm$

$$A = \frac{1}{2} L \times H \times N \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{2} \times 7 \times 6.5 \times 8 = 7 \times 6.5 \times 4 = 182cm^2$$

3 محيط مربع مساحته $225m^2$ هو :

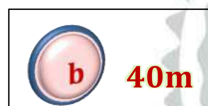
 25m b 20m  15m  60m

الحل : مساحة المربع :

$$A = L^2 \quad \Longrightarrow \quad L^2 = 225 \quad \Longrightarrow \quad L = \sqrt{225} = 15m$$

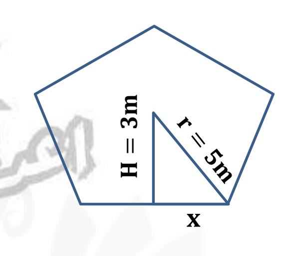
$$P = 4 \times L = 4 \times 15 = 60$$ محيط المربع

4 محيط خماسي منتظم طول عامده 3m ونصف قطر دائرته 5m هو :

 16.2m  40m c 16m  10.49m

الحل : $P = ? \;,\; H = 3m \;,\; r = 5m$

$r^2 = H^2 + x^2$ مبرهنة فيثاغورس



$$(5)^2 = (3)^2 + x^2 \quad \Longrightarrow \quad 25 = 9 + x^2$$

$$x^2 = 25 - 9 = 16 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{16} = 4m$$

$$L = 2x = 2(4) = 8m$$

$$P = n \times L = 5 \times 8 = 40m$$

5 مساحة سباعي منتظم طول عامده 6cm وطول ضلعه 7.5cm هو :

 $157.5cm^2$  $28.5cm^2$  $28m^2$  $9975m^2$

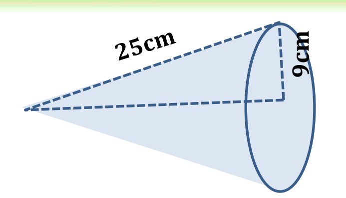
الحل : $A = ? \;,\; H = 6cm \;,\; L = 7.5cm \;,\; n = 7$

$$A = \frac{1}{2} L \times H \times n = \frac{1}{2} \times 7.5 \times 6 \times 7 = 7.5 \times 3 \times 7 = 157.5cm^2$$

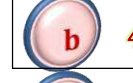
اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998


6


المساحة الجانبية للمخروط في الشكل المجاور هو :




a) $360\pi cm^2$


b) $450\pi cm^2$


c) $369\pi\pi cm^2$


r) $1640cm^2$


الحل : $LA = ?\ ,\ l = 25cm\ ,\ r = 9cm$


المساحة الجانبية للمخروط $LA = 2\pi r \times l = 2\pi \times 9 \times 25 = 450cm^2$


7

حجم حرم قاعدته مربعة طول كل ضلع 18cm وارتفاعه 20cm


a) $2160cm^3$


b) $120cm^3$


c) $260cm^3$


d) $134cm^2$

الحل : $V = ?\ ,\ L = 18cm\ ,\ h = 20cm$

مساحة القاعدة المربعة $B = L \times L = 18 \times 18 = 324cm^2$

$V = \frac{1}{3}B \times h = \frac{1}{3} \times 324 \times 20 = 108 \times 20 = 2160cm^3$

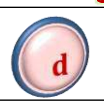
8


المساحة الكلية لمخروط مساحة قاعدته $25\pi cm^2$ وارتفاعه $12cm$ هو :


a) $108\pi cm^2$


b) $27\pi cm^2$


c) $208\pi cm^2$

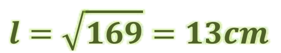

d) $155\pi cm^2$

الحل : $TA = ?\ ,\ A = 25\pi cm^2\ ,\ h = 12cm$

مساحة القاعدة $A = \pi r^2$

$25\pi = \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad r = 5cm$

$l^2 = h^2 + r^2 = (12)^2 + (5)^2 = 144 + 25 = 169$

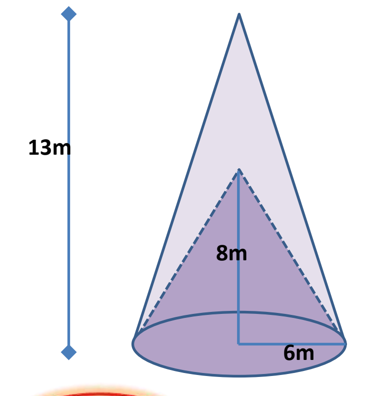

$l = \sqrt{169} = 13cm$

$TA = 2\pi r \times l + \pi r^2$


المساحة الكلية $TA = 2\pi \times 5 \times 13 + \pi(5)^2 = 130\pi + 25\pi = 155\pi cm^2$

9

حجم الشكل المركب المجاور هو :




a) $27\pi cm^3$


b) $75\pi cm^3$


c) $48\pi cm^3$


d) $180\pi cm^3$

الحل : لإيجاد حجم الشكل المركب نجد اولا حجم المخروط الصغير وحجم المخروط الكبير وبعد ذلك نجمع الحجوم لنجد حجم الشكل المركب .

$V_1 = \frac{1}{3} r^2 \pi \times h$ حجم المخروط الصغير

$V_1 = \frac{1}{3} \times (6)^2 \pi \times 8 = \frac{1}{3} \times 36\pi \times 8 = 12\pi \times 8 = 96\pi cm^3$

$V_2 = \frac{1}{3} r^2 \pi \times h$ حجم المخروط الكبير

$V_2 = \frac{1}{3} \times (6)^2 \pi \times 13 = \frac{1}{3} \times 36\pi \times 13 = 12\pi \times 13 = 156\pi cm^3$

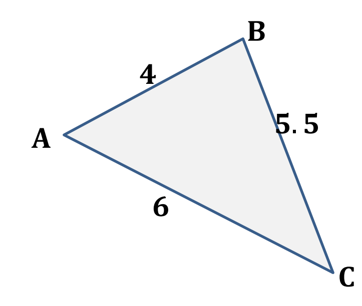
المثلثات

صفحة 104

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي :



1 رتب الزوايا من الاصغر الى الاكبر في المثلث المجاور :



a $m\angle C , m\angle A , m\angle B$ **b** $m\angle A , m\angle B , m\angle C$

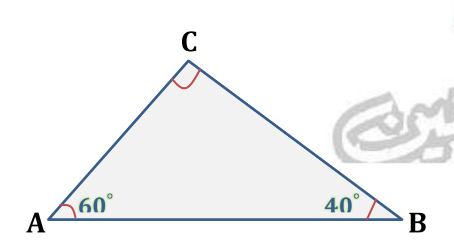


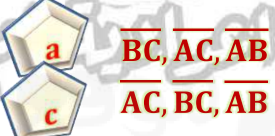
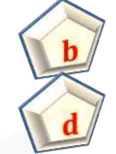
c $m\angle B , m\angle C , m\angle A$ **d** $m\angle C , m\angle B , m\angle A$

الحل : الضلع الاقصر $\overline{AB}$ ⟸ الزاوية الصغرى $\angle C$

الضلع الاطول $\overline{BC}$ ⟸ الزاوية الكبرى $\angle B$ ⟸ الترتيب هو : $m\angle B , m\angle A , m\angle C$

2 رتب الاضلاع من الاطول الى الاقصر في المثلث المجاور :



a $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ **b** $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$

c $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AB}$ **d** $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$

الحل :

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$ مجموع زوايا المثلث

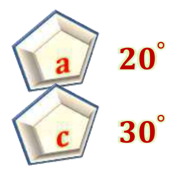
$60^\circ + 40^\circ + m\angle C = 180^\circ \Rightarrow 100^\circ + m\angle C = 180^\circ \Rightarrow m\angle C = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

$\therefore m\angle C , m\angle A , m\angle B$

الترتيب هو : $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ الجواب فرع (b)

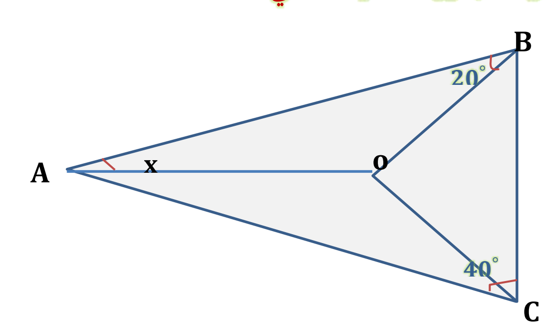
اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

3 اذا كانت O هي نقطة التقاء منصفات زوايا المثلث ABC في الشكل المجاور فأن قيمة x هي :

b 40° a 20°

d 50° c 30°



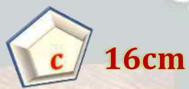
الحل :

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$ مجموع زوايا المثلث

$m\angle A + 40^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow m\angle A + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow m\angle A = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

$x = \frac{1}{2} m\angle A = \frac{1}{2} \times 100^\circ = 50^\circ \Rightarrow$ الجواب فرع (d)

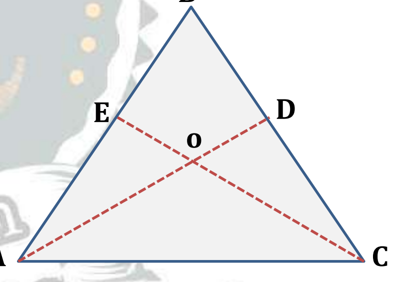
4 المثلث ABC فيه $\overline{AD}, \overline{CE}$ قطعتان متوسطتان تلتقيان في نقطة O, $AD = 36cm, CE = 24cm$ فأن قيمة $\overline{OE}$ علما ان رأس المثلث هو النقطة B هي :



d 12cm c 16cm b 24cm a 8cm

الحل : $\overline{CE}$ قطعة متوسطة



$OE = \frac{2}{3} CE$

$OE = \frac{2}{3} \times 24 = 2 \times 8 = 16cm$

الجواب فرع (C)

5 في السؤال (4) قيمة $\overline{AO}$ هي :







d 14cm c 24cm b 12cm a 6cm

الحل : $\overline{CE}$ قطعة متوسطة

$AO = \frac{2}{3} AD$

$AO = \frac{2}{3} \times 36 = 2 \times 12 = 24cm$

الجواب فرع (C)

6 نسبة التشابه بين المثلثين ADB, ABC هي :



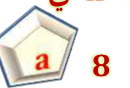
a) $\frac{8}{7}$ b) $\frac{7}{8}$ c) 7   d) 8

الحل :

$$\frac{DA}{AC}=\frac{4.2}{4.8}=\frac{7}{8} \quad , \quad \frac{DB}{BC}=\frac{4.9}{5.6}=\frac{7}{8}$$

الجواب فرع (b)

7 اذا كانت المثلثان DBE , ABC متشابهان وكانت الزاويتان $m\angle ABC \cong m\angle DEB$ فأن قيمة x هي :

a) 8   b) 12   c) 10   d) 6

الحل :

$$\frac{x-1}{x+2}=\frac{9}{12} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-1}{x+2}=\frac{3}{4}$$ الطرفين في الوسطين

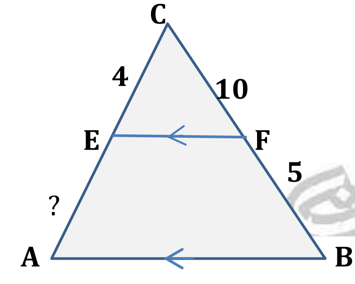
$$4x-4=3x+6 \quad \Rightarrow \quad 4x-3x=4+6 \quad \Rightarrow \quad x=10 \quad \Rightarrow$$ الجواب فرع (C)

التناسب والقياس في المثلثات

صفحة 105

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

1 اذا كان : $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ فأن طول القطعة المستقيمة AE هو :



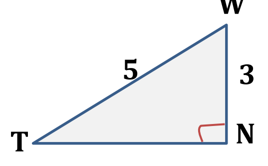
a) 4   b) 5   c) 2   d) 10

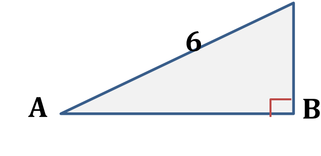
الحل :

$$\frac{AE}{EC}=\frac{BF}{FC} \quad \Rightarrow \quad \frac{AE}{4}=\frac{5}{10}$$ الطرفين في الوسطين

$$10 \times AE = 20 \quad \Rightarrow \quad AE=\frac{20}{10}=2 \quad \Rightarrow$$ الجواب فرع (C)

2  اذا كان : $\Delta TWN \sim \Delta ABC$ اذا علمت ان ارتفاع المثلث TWN هو (3) فأن مساحة المثلث ABC هي :







a) 6.57   b) 6   c) 7   d) 8

الحل :

$\frac{TW}{AC} = \frac{WN}{BC} \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{3}{BC}$　　الطرفين في الوسطين

$5 \times BC = 18 \quad \Rightarrow \quad BC = \frac{18}{5} = 3.6$

$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$　　مبرهنة فيثاغورس　　$\Rightarrow \quad (6)^2 = \left(\frac{18}{5}\right)^2 + (AB)^2$

$36 = \frac{324}{25} + (AB)^2 \quad \Rightarrow \quad (AB)^2 = 36 - \frac{324}{25} = \frac{900-324}{25} = \frac{576}{25} \quad \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{576}{25}} = \frac{24}{5}$

مساحة المثلث $ABC = \frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

$A = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{24}{5} \times \frac{18}{5} = \frac{12}{5} \times \frac{18}{5} = \frac{216}{25} = 8.64$

تم رسم الصورة بعد تحويلها بتناسب هندسي نسبته $\frac{4}{3}$ فتكون كما في الرسم المجاور :


اختر الاجابة الصحيحة للأسئلة [7 – 4]

A(0,4)　D(4,4)　C(0,0)　B(4,0)

3 احداثيات النقطة A قبل التحويل هي :

a) $(0,3)$　　b) $(3,0)$　　c) $(3,3)$　　d) $(0,0)$

الحل :

$A(0,4) \rightarrow A'\left(0, 4 \div \frac{4}{3}\right) \rightarrow A'\left(0, 4 \times \frac{3}{4}\right) \rightarrow A'(0,3)$

الجواب فرع (a)


4 احداثيات النقطة B قبل التحويل هي :

a) $(0,3)$　　b) $(3,0)$　　c) $(3,3)$　　d) $(0,0)$

الحل :

$B(4,0) \rightarrow B'\left(4 \div \frac{4}{3}, 0 \div \frac{4}{3}\right) \rightarrow B'\left(4 \times \frac{3}{4}, 0\right) \rightarrow B'(3,0)$

الجواب فرع (b)

5 احداثيات النقطة C قبل التحويل هي :

a) $(0,3)$ b) $(3,0)$ c) $(3,3)$ d) $(0,0)$

الحل :

$$C(0,0) \rightarrow C'\left(0 \div \frac{4}{3}, 0 \div \frac{4}{3}\right) \rightarrow C'(0,0)$$

الجواب فرع (d)

6 احداثيات النقطة D قبل التحويل هي :

a) $(0,3)$ b) $(3,0)$ c) $(3,3)$ d) $(0,0)$

الحل :

$$D(4,4) \rightarrow D'\left(4 \div \frac{4}{3}, 4 \div \frac{4}{3}\right) \rightarrow D'\left(4 \times \frac{3}{4}, 4 \times \frac{3}{4}\right) \rightarrow D'(3,3)$$

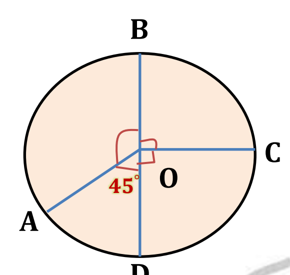
الجواب فرع (C)

صفحة 106

الدائرة



انظر الشكل المجاور واختر الاجابة الصحيحة للأسئلة [1 – 4]



1 قياس الزاوية $\angle AOB$ هو :

a) 180° b) 135° c) 90° d) 45°

الحل :

$m\angle AOB + m\angle\angle BOC + m\angle\angle COD + m\angle AOD = 360^\circ$ مجموع الشكل الرباعي

$m\angle AOB + 90^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 360^\circ \Rightarrow m\angle AOB + 225^\circ = 360^\circ$

$m\angle AOB = 360^\circ - 225^\circ = 135^\circ \Rightarrow$ الجواب فرع (b)

2 قياس القوس $\widehat{AB}$ هو :

a) 180 b) 90 c) 135 d) 45

الحل :

$m\ \widehat{AB} = m\angle AOB = 135^\circ \Rightarrow$ الجواب فرع (c)

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين


07703153998


قياس القوس $\widehat{ABC}$ هو :

a) 180 b) 90 c) 225 d) 135

الحل :

$m\ \widehat{ABC} = m\angle AOB + m\angle BOC$

$m\ \widehat{ABC} = 135^\circ + 90^\circ = 225^\circ \quad \Rightarrow$ الجواب فرع (c)

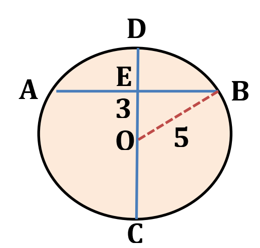
4 قياس القوس $\widehat{BC}$ هو :

a) 90 b) 42 c) 45 d) 135

الحل :

$m\ \widehat{BC} = m\angle BOC = 90^\circ \quad \Rightarrow$ الجواب فرع (a)

5 طول الوتر AB في الشكل المجاور :



a) 12 b) 10 c) 6 d) 8

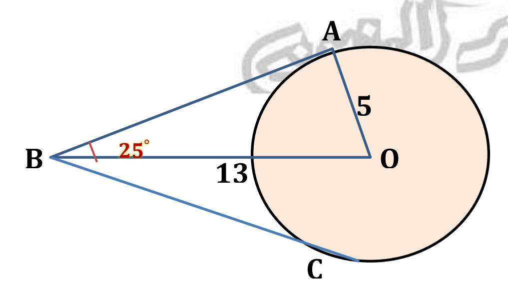
الحل :

$(BO)^2 = (EO)^2 + (BE)^2$ مبرهنة فيثاغورس $\Rightarrow (5)^2 = (3)^2 + (BE)^2 \Rightarrow 25 = 9 + (BE)^2$

$(BE)^2 = 25 - 9 = 16 \quad \Rightarrow \quad BE = \sqrt{16} = 4$

$AB = 2 \times BE = 2 = 4 = 8 \quad \Rightarrow$ الجواب فرع (d)

انظر الشكل المجاور واختر الاجابة الصحيحة للأسئلة [6 – 7]



6 قياس $\angle AOB$ هو :

a) 115° b) 120° c) 65° d) 90°

الحل :

$\overline{AB} \perp \overline{AO} \quad , \quad m\angle OAB = 90^\circ$ قائمة

$m\angle AOB + m\angle OAB + m\angle ABO = 180^\circ$ مجموع زوايا المثلث

$m\angle AOB + 90^\circ + 25^\circ = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad m\angle AOB + 115^\circ = 180^\circ$

$m\angle AOB = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ \quad \Rightarrow$ الجواب فرع (c)


طول القطعة المستقيمة BC هو :   a) 10   b) 14   c) 12   d) 5

الحل :

$(BO)^2 = (AO)^2 + (AB)^2$ مبرهنة فيثاغورس $\Rightarrow (13)^2 = (5)^2 + (AB)^2 \Rightarrow 169 = 25 + (AB)^2$

$(AB)^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow AB = \sqrt{144} = 12$

$\overline{BC} \cong \overline{AB} \Rightarrow \overline{BC} = 12$ مبرهنة المماسين $\Rightarrow$ الجواب فرع (C)

المثلث والدائرة . القطع المستقيمة والدائرة

صفحة 107

انظر الشكل المجاور واختر الاجابة الصحيحة للأسئلة [2 – 1]


1 قيمة x هي :

a) 2   b) 6   c) 9   d) 3

الحل :

$KE \times EM = AE \times EB$ مبرهنة القطعين في الدائرة

$(x)(2x) = 3 \times 6 \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = \frac{18}{2} = 9$

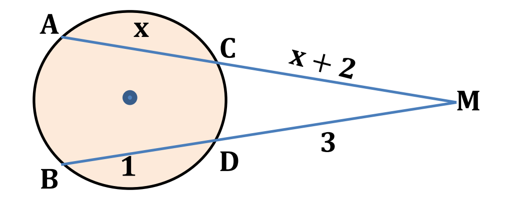
$x = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow$ الجواب فرع (d)


طول الوتر $\overline{MK}$ هو :   a) 12   b) 9   c) 5   d) 4

الحل : من سؤال (1) قيمة $x = 3$

$\overline{MK} = x + 2x = 3 + 2(3) = 3 + 6 = 9 \Rightarrow$ الجواب فرع (b)

انظر الشكل المجاور واختر الاجابة الصحيحة للأسئلة [5 – 3]



3 قيمة x هي :

a) 2   b) 3   c) 1   d) 4

الحل :

$MC \times CA = MD \times DB$ مبرهنة المماس والقاطع في الدائرة

$x(x+2) = 3 \times 1 \Rightarrow x^2 + 2x = 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0$

أما $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ يهمل أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ الجواب فرع (c)





طول $\overline{BM}$ هو :   a) 4   b) 6   c) 5   d) 2

الحل :

$\overline{BM} = \overline{MD} + \overline{DB} = 3 + 1 = 4 \quad \Rightarrow$ الجواب فرع (a)

5 طول $\overline{AM}$ هو :   a) 4   b) 2   c) 6   d) 3

الحل : من سؤال (3) قيمة $x = 1$

$\overline{AM} = \overline{AC} + \overline{CM} = x + x + 2 = 1 + 1 + 2 = 4 \quad \Rightarrow$ الجواب فرع (a)

صفحة 64



المضلعات والمجسمات ((الهرم والمخروط))



جد مساحة ومحيط تساعي منتظم طول ضلعه 3cm وطول العامد فيه 0.8cm

الحل : $L = 3cm \; , \; H = 0.8cm \; , \; n = 9$

المحيط $P = n \times L = 9 \times 3 = 27 \text{ cm}$

المساحة $A = \frac{1}{2} \times L \times H \times n = \frac{1}{2} \times 3 \times 0.8 \times 9 = 3 \times 0.4 \times 9 = 10.8 \text{ cm}^2$



جد مساحة ومحيط عشاري منتظم طول ضلعه 2.5cm وطول العامد فيه 1.5cm

الحل : $L = 2.5cm \; , \; H = 1.5cm \; , \; n = 10$

المحيط $P = n \times L = 10 \times 2.5 = 25 \text{ cm}$

المساحة $A = \frac{1}{2} \times L \times H \times n = \frac{1}{2} \times 2.5 \times 1.5 \times 10 = 2.5 \times 1.5 \times 5 = 18.75 cm^2$



جد حجم هرم ارتفاعه 8m وقاعدته خماسي منتظم مساحته $24m^2$

الحل : $V = ? \; , \; h = 8m \; , \; B = 24m^2$

$V = \frac{1}{3} \times B \times h = \frac{1}{3} \times 24 \times 8 = 8 \times 8 = 64 \text{ m}^3$



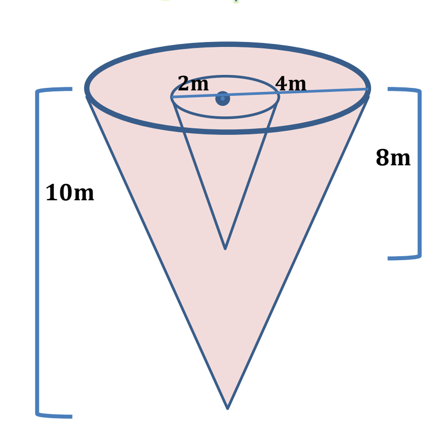






جد حجم الجسم المركب في الشكل ادناه .

الحل: نجد حجم المخروط الصغير اولا : $r = 2m , h = 8m$



$$V_1 = \frac{1}{3}r^2\pi \times h = \frac{1}{3} \times (2)^2\pi \times 8 = \frac{1}{3} \times 4\pi \times 8 = \frac{32}{3}\pi\ m^3$$

نجد حجم مخروط الكبير : $r = 4m , h = 10m$

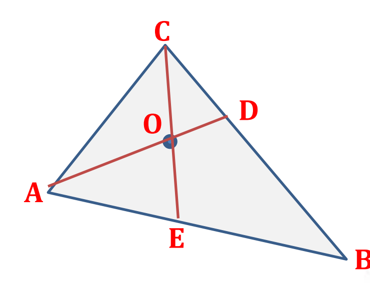
$$V_2 = \frac{1}{3}r^2\pi \times h = \frac{1}{3} \times (4)^2\pi \times 10 = \frac{1}{3} \times 16\pi \times 10 = \frac{160}{3}\pi\ m^3$$

حجم الجسم المركب $V = V_2 - V_1 = \frac{160}{3}\pi - \frac{32}{3}\pi = \frac{128}{3}\pi\ m^3$

المثلثات



المثلث ABC , $\overline{CE}, \overline{AD}$ قطعتان متوسطتان تلتقيان في نقطة O , $CE = 12cm , AD = 9cm$ جد طول $\overline{AO}, \overline{OE}$



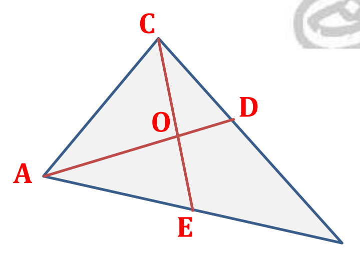
الحل:

$$OE = \frac{1}{3}CE \Rightarrow OE = \frac{1}{3} \times 12 = 4cm$$

$$OA = \frac{2}{3}AD \Rightarrow OA = \frac{2}{3} \times 9 = 2 \times 3 = 6cm$$



المثلث ABC , $\overline{CE}, \overline{AD}$ قطعتان متوسطتان تلتقيان في نقطة O , $CE = 24cm , AD = 12cm$ جد طول $\overline{AO}, \overline{OE}$



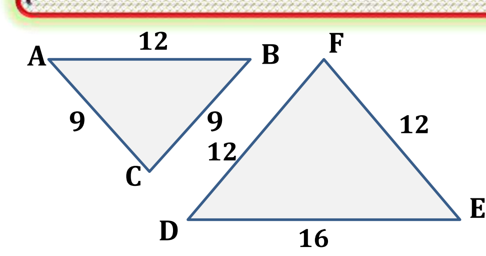
الحل:

$$OE = \frac{1}{3}CE \Rightarrow OE = \frac{1}{3} \times 22 = 8cm$$

$$OA = \frac{2}{3}AD \Rightarrow OA = \frac{2}{3} \times 12 = 2 \times 4 = 8cm$$



بين اذا كان المثلثين في الشكل ادناه متشابهان واكتب نسبة التشابه .



الحل :

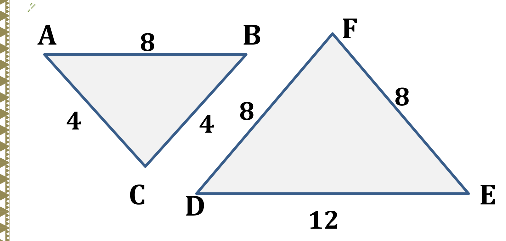
$$\frac{AB}{DE}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{AC}{EF}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4} \quad , \quad \frac{BC}{FD}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

$\therefore\ \Delta ABC \sim \Delta DEF$



بين اذا كان المثلثين في الشكل ادناه متشابهان واكتب نسبة التشابه



الحل :

$$\frac{AB}{DE}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{AC}{EF}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{BC}{FD}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

المثلثان غير متشابهان





استعمل الشكل ادناه وبين ما اذا كان : $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$



الحل :

$$\frac{CB}{BA}=\frac{8}{2}=\frac{4}{1}=4$$

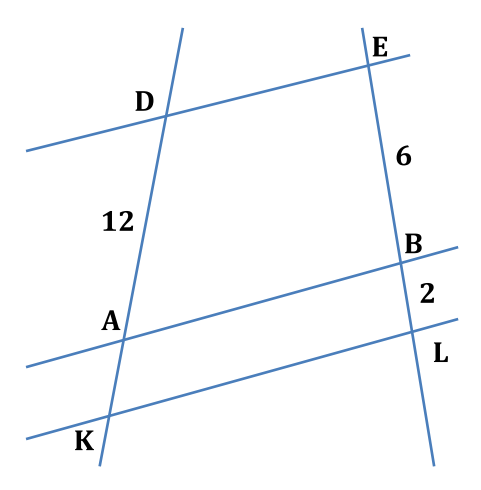
$$\frac{CD}{DE}=\frac{4}{1}=4$$

$$\frac{CB}{BA}=\frac{CD}{DE}$$

حسب عكس مبرهنة التناسب المثلثي فأن : $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$



جد طول القطعة AK في الشكل ادناه اذا علمت أن : $\overline{DE} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{KL}$



الحل :

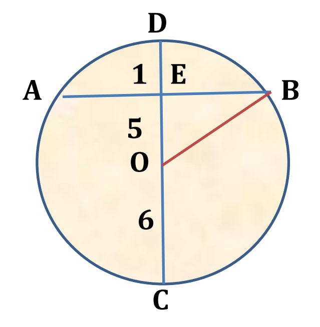
$\frac{DA}{AK} = \frac{EB}{BL}$ مبرهنة طالس

$\frac{12}{AK} = \frac{6}{2}$ الطرفين في الوسطين

$6 \times AK = 24$

$AK = \frac{24}{6} = 4$

الدائرة





استعمل مبرهنة القطر العمودي وجد طول الوتر AB

اذا علمت أن نصف القطر $6cm$, $OE = 5cm$

الحل :

$DE = OD - OE = 6 - 5 = 1cm$, $OB = OC = 6cm$

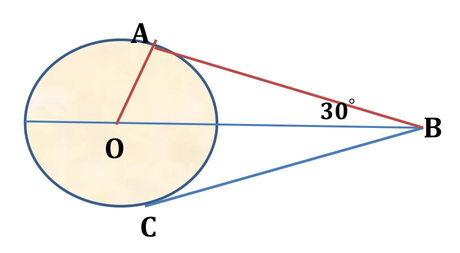
$(OB)^2 = (OE)^2 + (EB)^2$ مبرهنة فيثاغورس

$(6)^2 = (5)^2 + (EB)^2 \Rightarrow 36 = 25 + (BE)^2$

$(EB)^2 = 36 - 25 = 11 \Rightarrow EB = \sqrt{11}$

القطر DC عمودي على الوتر وينصفه ((مبرهنة القطر العمودي)) .

$\therefore AB = 2 \times EB = 2 \times \sqrt{11} = 2\sqrt{11}cm$



تدريب

دائرة مركزها O في الشكل ادناه , $\overline{AB}$ هو مماس للدائرة في A

وقياس الزاوية ABO يساوي 30° جد قياس الزاوية AOB

ثم جد طول القطعة المستقيمة BC علما ان طول المماس AB

يساوي 4cm

الحل :

$m\angle BAO = 90^\circ$ قائمة

$m\angle AOB + mBAO + mABO = 180^\circ$ مجموع زوايا المثلث





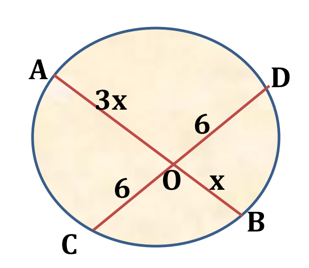


$m\angle AOB + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ \quad \Rightarrow m\angle AOB + 120^\circ = 180^\circ$

$m\angle AOB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$BC = AB = 4cm$ مبرهنة المماسين

المثلث والدائرة , القطع المستقيمة والدائرة





جد قيمة x وطول القاطع AB في الشكل ادناه .

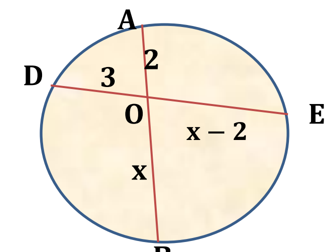
الحل :

$A0 \times OB = DO \times OC$ مبرهنة القاطعين في الدائرة

$(3x)(x) = 6 \times 6 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{36}{3}$

$x^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$AB = 3x + x = 3 \times 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$





جد قيمة x وطول القاطع AB, DE في الشكل ادناه .

الحل :

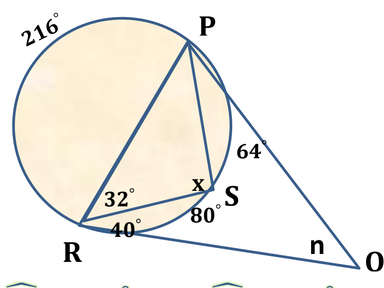
$A0 \times OB = DO \times OE$ مبرهنة القاطعين في الدائرة

$(2)(x) = 3(x - 2) \quad \Rightarrow \quad 2x = 3x - 6 \quad \Rightarrow \quad 3x - 2x = 6 \Rightarrow \quad x = 6$

$AB = 2 + x = 2 + 6 = 8$

$DE = 3 + x - 2 = 3 + 6 - 2 = 7$

الزوايا والدائرة





جد قيمة الزوايا المجهولة في الشكل ادناه .

الحل :

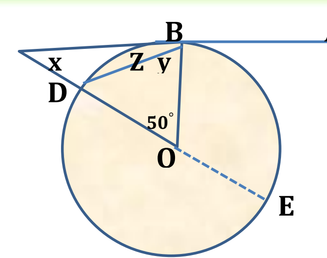
$m\widehat{RS} = 80^\circ \quad , \quad m\widehat{PS} = 64^\circ$

$m\angle n = \frac{1}{2}\, m\widehat{RP} = \frac{1}{2} \times 216^\circ = 108^\circ$

$m\angle x = 216^\circ$



جد قيمة الزوايا المجهولة (x, y, Z) في الشكل ادناه .



الحل :

$m\angle B = 90^\circ$ قائمة

$m\angle C + m\angle B + m\angle O = 180^\circ$ مجموع زوايا المثلث

$x + 90^\circ + 50^\circ = 180^\circ \Rightarrow x + 140^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$

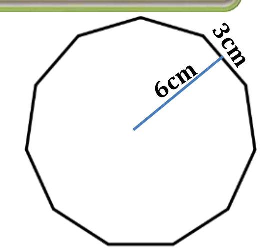
$m\angle BOD = \frac{1}{2} m\widehat{BD} \Rightarrow 50^\circ = \frac{1}{2} m\widehat{BD} \Rightarrow m\widehat{BD} = 100^\circ$

$Z = \frac{1}{2} m\widehat{BD} = \frac{1}{2} \times 100^\circ = 50^\circ$

$y = 90^\circ - Z = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

صفحة 67





1 جد مساحة ومحيط مضلع منتظم اذا اعطيت المعلومات في الشكل المجاور .

الحل : $H = 6cm , L = 3cm , n = 11$

$P = n \times L = 11 \times 3 = 33cm$ المحيط

$A = \frac{1}{2} \times L \times H \times n = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 \times 11 = 3 \times 2 \times 11 = 66\ cm^2$ المساحة

2 جد المساحة السطحية والحجم للمخروط اذا علمت ان مساحة قاعدته $9\pi cm^2$ وارتفاعه الجانبي 5cm

الحل : $B = 9\pi cm^2 , l = 5cm$

$B = r^2\pi$ القاعدة دائرة

$9\pi = r^2\pi \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3cm$

$l^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow (5)^2 = h^2 + (3)^2 \Rightarrow 25 = h^2 + 9$

$h^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow h = \sqrt{16} = 4cm$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h = \frac{1}{3}\pi \times 9 \times 4 = 12\pi\ cm^3$ الحجم

$TA = 2\pi r \times l + \pi r^2 = 2\pi \times 3 \times 5 + \pi(3)^2 = 30\pi + 9\pi = 39\pi cm^2$ المساحة السطحية

3 المثلثان : ABC, KLM متشابهان مساحة المثلث $ABC = 24cm^2$
ما مساحة المثلث KLM

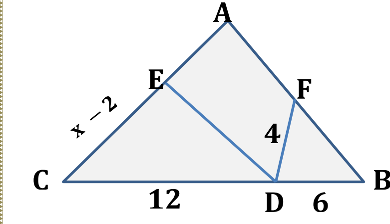
الحل :

نفرض مساحة المثلث $ABC = A_1$, مساحة المثلث $KLM = A_2$

$$\frac{(BC)^2}{(ML)^2} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow \frac{(10)^2}{(15)^2} = \frac{24}{A_2}$$

$$\frac{100}{225} = \frac{24}{A_2} \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{24}{A_2}$$ الطرفين في الوسطين

$$4 \times A_2 = 216 \Rightarrow A_2 = \frac{216}{4} = 54cm^2$$



4 بين ان المثلثين ABC , FBD في الشكل المجاور متشابهان واكتب نسبة التشابه اذا كان :
$m\angle C = m\angle FDB$, $\frac{AC}{CB} = \frac{DF}{DB}$ وجد قيمة x

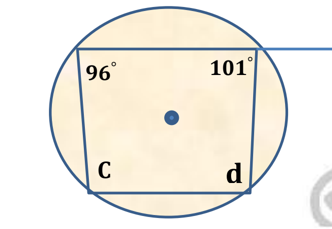
الحل :

$$\frac{EC}{FD} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow \frac{x-2}{4} = \frac{12}{6} \Rightarrow \frac{x-2}{4} = 2$$ الطرفين في الوسطين

$$x - 2 = 8 \Rightarrow x = 8 + 2 = 10$$

5 جد قياس الزوايا المجهولة في الأشكال الآتية :

i)

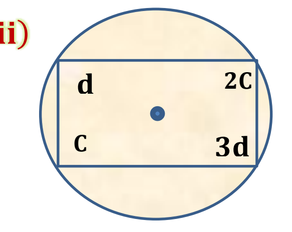


الحل :

$d + 96^\circ = 180^\circ \Rightarrow d = 180^\circ - 96^\circ = 84^\circ$ مبرهنة الرباعي الدائري

$c + 101^\circ = 180^\circ \Rightarrow c = 180^\circ - 101^\circ = 79^\circ$ مبرهنة الرباعي الدائري

ii)



الحل :

$d + 3d = 180^\circ$ مبرهنة الرباعي الدائري

$$4d = 180^\circ \Rightarrow d = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$$

$C + 2C = 180^\circ$ مبرهنة الرباعي الدائري

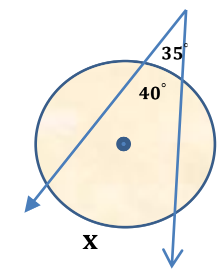
$$3C = 180^\circ \Rightarrow C = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$



اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

6 جد قيمة x في كل مما يأتي :

i)

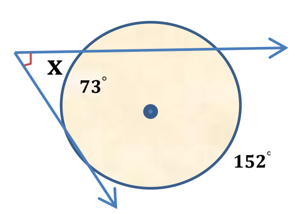


الحل:

$$35^\circ = \frac{1}{2}(x - 40^\circ) \Rightarrow 70^\circ = x - 40^\circ$$

$$x = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ$$

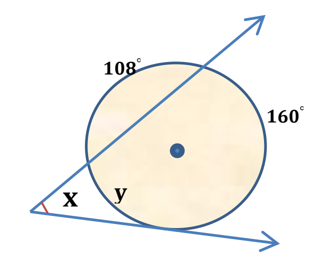
ii)



الحل:

$$x = \frac{1}{2}(152^\circ - 73^\circ) = \frac{1}{2} \times 79^\circ = 39.5^\circ$$

iii)

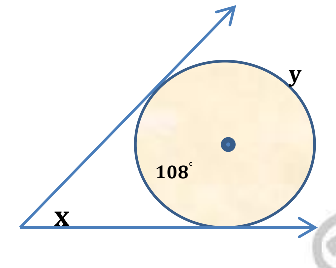


الحل:

$$y = 360^\circ - (160^\circ + 108^\circ) = 360^\circ - 268^\circ = 92^\circ$$

$$x = \frac{1}{2}(160^\circ - 92^\circ) = \frac{1}{2} \times 68^\circ = 34^\circ$$

iv)



الحل:

$$y = 360^\circ - 108^\circ = 252^\circ$$

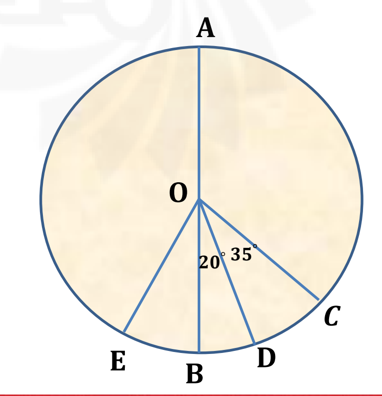
$$x = \frac{1}{2}(252^\circ - 108^\circ) = \frac{1}{2} \times 144^\circ = 72^\circ$$

7 جد قياس الزوايا والأقواس المجهولة في الشكل المجاور .

i) $m\angle AOC$ ii) $m\,\widehat{DC}$

iii) $m\,\widehat{DB}$ iv) $m\angle DOA$

v) $m\,\widehat{EB}$ iiv) $m\angle AOE$



اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين
07703153998

الحل :

i) $m\angle AOC = 360^\circ - (m\angle AOB + m\angle BAD + m\angle DOC)$

$m\angle AOC = 360^\circ - (180^\circ + 20^\circ + 35^\circ) = 360^\circ - 235^\circ = 125^\circ$

ii) $m\angle DOC = \frac{1}{2} m\widehat{DC} \Rightarrow 35^\circ = \frac{1}{2} m\widehat{DC}$ الطرفين في الوسطين $\Rightarrow m\,\widehat{DC} = 70^\circ$

iii) $m\angle DOB = \frac{1}{2} m\widehat{DB} \Rightarrow 20^\circ = \frac{1}{2} m\widehat{DB}$ الطرفين في الوسطين $\Rightarrow m\,\widehat{DB} = 40^\circ$

iv) $m\angle DOA = m\angle DOC + m\angle AOC = 35^\circ + 125^\circ = 160^\circ$

v) $m\angle BOE = m\angle DOB = 20^\circ$

$m\angle BOE = \frac{1}{2} m\widehat{EB} \Rightarrow 20^\circ = \frac{1}{2} m\widehat{EB}$ الطرفين في الوسطين $\Rightarrow m\,\widehat{EB} = 40^\circ$

iiv) $m\angle AOE = 360^\circ - (m\angle AOC + m\angle DOC + m\angle BOD + m\angle EOB)$

$m\angle AOE = 360^\circ - (125^\circ + 35^\circ + 20^\circ + 20^\circ) = 360^\circ - 200^\circ = 160^\circ$



اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998

الفصل السادس // الاحصاء والاحتمالات

تصميم دراسة مسحية

العينة : هي مجموعة جزئية من المجتمع . ومن خلال تحليل نتائج العينة يمكن التوصل الة استنتاجات حول المجتمع كاملا . تكون الاستنتاجات اكثر تمثيلا للمجتمع في أي من الحالتين :

■ حجم العينة اكبر . ■ استعمال عينات اكثر .

ولنوع العينة تأثير في الاستنتاجات التي يتوصل اليها وهي على نوعين :

العينة المتحيزة : اذا كان لكل فرد منها الاحتمال نفسه في الاختيار .

العينة غير المتحيزة : اذا كان لأفرادها احتمالات مختلفة في الاختيار .

مثال وزع مدير مدرسة 100 ورقة استبانة على طلاب مدرسته للتعرف الى جودة المواد الغذائية في حانوت المدرسة .

i) حدد العينة والمجتمع الذي اختير منه . ii) صف اسلوب جمع البيانات الذي استعمله المدير .

iii) حدد ما اذا كانت العينة متحيزة أم غير متحيزة .

الحل : i) العينة : الطلاب الذين تسلموا الاستبيانات وعددهم 100 طالب .

المجتمع : جميع طلاب المدرسة .

ii) اسلوب جمع البيانات هو دراسة مسحية اذ توجد البيانات من اجابات افراد العينة نحو الاستبانة .

iii) العينة غير متحيزة : لأن هذه العينة تتكون من طلاب اختيروا عشوائيا .

مثال يريد صاحب متجر ان يقدم هدية لكل زبون يتسوق من متجره فوقف عند باب المتجر وسأل 20 متسوقا عن نوع الهدية التي يود ان تقدم له .

i) حدد العينة والمجتمع الذي اختاره صاحب المتجر .

ii) صف اسلوب جمع البيانات الذي استعمله صاحب المتجر .

iii) حدد ما اذا كانت العينة متحيزة أم غير متحيزة .

الحل : i) العينة : المتسوقون الذين سألوا وعددهم 20 متسوقا .

المجتمع : المتسوقون الذين دخلوا المتجر .

ii) اسلوب جمع البيانات هو دراسة مسحية اذ توجد البيانات من اجابات افراد العينة المختارة .

iii) العينة غير متحيزة : لأن الأشخاص الذين دخلوا المتجر اختيروا عشوائيا .

مثال سئل 10 اشخاص دخلوا مطعم كباب عن الاكلات التي يفضلونها .

i) حدد العينة والمجتمع الذي اختاره صاحب المطعم .

ii) صف اسلوب جمع البيانات الذي استعمله صاحب المطعم .

iii) حدد ما اذا كانت العينة متحيزة أم غير متحيزة .





الحل : i) العينة : الاشخاص العشرة الذين دخلوا المطعم .

المجتمع : جميع الاشخاص الذين دخلوا المطعم .

ii) اسلوب جمع البيانات هو دراسة مسحية اذ توجد البيانات من اجابات افراد العينة المختارة .

iii) العينة متحيزة : لأن الاكلة المفضلة للأشخاص الموجودين في المطعم الكباب هي الكباب .

تحليل النتائج

بعد جمع البيانات من خلال الدراسة المسحية تلخص البيانات كي تكون ذات معنى وذلك عن طريق استعمال مقاييس النزعة المركزية ((الوسط الحسابي – الوسيط – المنوال)) واختيار المقياس الانسب لتمثيل البيانات .

النوع	متى يفضل استعماله
الوسط الحسابي	عندما لا توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات
الوسيط	عندما توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات ولكن لا توجد فجوات كبيرة في وسط البيانات
المنوال	عندما يوجد اعداد متكررة في مجموعة البيانات

الوسط الحسابي $= \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$ ويرمز للوسط الحسابي بالرمز $(\bar{x})$

الوسيط (ME): 1) نرتب القيم تصاعديا أو تنازليا .

2) اذا كان عدد القيم فرديا فأن قيمة الوسيط تقع في المنتصف .

3) اذا كان عدد القيم زوجيا هنالك قيمتان تقع في المنتصف نجمع هاتين القيمتين ثم نقسم على 2 .

المنوال : يمثل العدد الأكثر تكرارا .

مثال أي مقاييس النزعة المركزية (أن وجدت) هو الانسب لوصف البيانات في كل مما يأتي :

i) البيانات المجاورة تبين أوزان 9 صناديق بالكيلو غرام : 3, 2, 3, 6, 5, 5, 21, 4, 3, 5

الحل : الوسط الحسابي : غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة كبيرة متطرفة هي : 21 تؤثر في قيمة الوسط الحسابي .

المنوال : غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود اكثر من منوال هما : 3, 5

الوسيط : هو المقياس الانسب لتمثيل البيانات لعدم وجود فجوة كبيرة في وسط البيانات : 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 21

الوسيط $ME = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$

ii) حصل محمد على الدرجات التالية في خمسة اختيارات في مادة الرياضيات : 90, 93, 85, 86, 91

الحل : الوسط الحسابي $= \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$





الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{90+93+85+86+91}{5} = \frac{445}{5} = 89$

الوسط الحسابي : 89 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لعدم وجود قيمة متطرفة .

المنوال : لا يوجد لعدم وجود تكرار في البيانات .

الوسيط : نرتب القيم تصاعديا : 85, 86, 90, 91, 93

الوسيط : 90 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا يوجد فجوة كبيرة في وسط البيانات .

تأكد من فهمك حدد العينة والمجتمع ثم صف اسلوب جمع البيانات وميز العينة المتحيزة عن العينة غير المتحيزة في كل مما يلي فسر اجابتك .

1 دخل 30 شخص مكتبة عامة وسئل كل سادس شخص يدخل المكتبة عن هوايته المفضلة .

الحل : i) العينة : الاشخاص الذين سألوا وعددهم 5 اشخاص .

المجتمع : شخص واحد من كل ستة اشخاص دخلوا المكتبة .

ii) اسلوب جمع البيانات هي دراسة مسحية اذ تؤخذ الاجابات من افراد العينة المختارة .

iii) العينة متحيزة : لأن الهواية المفضلة للأشخاص الذين يدخلون المكتبة هي القراءة .

2 وزعت 100 استبانة من مجموعة من عمال أحد المصانع تتضمن سؤالا حول ظروف العمل في المعمل .

الحل : i) العينة : الاشخاص الذي تسلموا الاستبيانات وعددهم 100 عامل .

المجتمع : جميع عمال المصنع .

ii) اسلوب جمع البيانات هي دراسة مسحية اذ تؤخذ الاجابات من افراد العينة نحو الاستبانة .

iii) العينة غير متحيزة : لأن هذه العينة تتكون من عمال اختيروا عشوائيا .

3 وزعت الحيوانات في أحدى حدائق الحيوانات , ثم اختير حيوان من كل مجموعة بصورة عشوائية لأجراء فحوصات عليه .

الحل : i) العينة : حيوان واحد من كل مجموعة من الحيوانات عشوائيا .

المجتمع : مجموعة من الحيوانات .

ii) اسلوب جمع البيانات هي دراسة مسحية اذ تؤخذ الفحوصات من افراد العينة المختارة .

iii) العينة غير متحيزة : لأننتائج الفحوصات مختلفة من حيوان لآخر .

اي مقاييس النزعة المركزية (ان وجدت) هو الأنسب لوصف البيانات التالية ؟ فسر اجابتك .

4 8 , 10 , 14 , 8 , 13 , 6

الحل : الوسط الحسابي $= \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$





الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{8+10+14+8+13+6}{6} = \frac{59}{6} = 9.83$

الوسط الحسابي : 9.83 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لعدم وجود قيمة متطرفة .
المنوال : هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة واحدة متكررة مرتين هي : 8
الوسيط : نرتب القيم تصاعديا : 6 , 8 , 8 , 10 , 13 , 14

الوسيط $ME = \frac{8+10}{2} = \frac{18}{2} = 9$

الوسيط : 9 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات .

5 **8 , 10 , 8 , 9 , 11 , 4 , 6 , 54**

الحل :

الوسط الحسابي : غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة كبيرة متطرفة هي : 54 تؤثر في قيمة الوسط الحسابي .
المنوال : هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة واحدة متكررة مرتين هي : 8
الوسيط : نرتب القيم تصاعديا : 4 , 6 , 8 , 8 , 9 , 10 , 11 , 54

الوسيط $ME = \frac{8+9}{2} = \frac{17}{2} = 7.5$

الوسيط : 8.5 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات .

6 **8 , 9 , 8 , 6 , 10 , 9 , 11 , 13 , 14 , 8 , 6 , 7 , 19**

الحل : الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$

$$\bar{x} = \frac{8+9+8+6+10+9+11+13+14+8+6+7+19}{6} = \frac{128}{13} = 9.84$$

الوسط الحسابي : 9.84 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لعدم وجود قيمة متطرفة .
المنوال : هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة واحدة متكررة ثلاث مرات هي : 8
الوسيط : نرتب القيم تصاعديا : 6 , 6 , 7 , 8 , 8 , 8 , 9 , 9 , 10 , 11 , 13 , 14 , 19

الوسيط : 9 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات .

7 **ترغب ادارة مطبعة في اعادة تدوير الورق التالف فأحصى العامل المكلف بذلك أن عدد الرزم في نهاية كل شهر ولمدة ستة اشهر فكانت : 14 , 18 , 13 , 12 , 15 , 13**

الحل : الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$

الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{13+15+12+13+18+14}{6} = \frac{85}{6} = 14.16$

الوسط الحسابي : 14.16 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لعدم وجود قيمة متطرفة

المنوال : هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة واحدة متكررة مرتين هي : 13

الوسيط : نرتب القيم تصاعديا : 18 , 15 , 14 , 13 , 13 , 12

الوسيط $ME = \frac{13+14}{2} = \frac{27}{2} = 13.5$

الوسيط : 13.5 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات .



حدد العينة والمجتمع ثم صف اسلوب جمع البيانات وميز العينة المتحيزة من العينة غير المتحيزة في كل مما يلي وفسر اجابتك .

8 **وزعت جمعية خيرية 200 استبانة على سكان احد الاحياء تتضمن سؤال حول طريقة جمع التبرعات للجمعية .**

الحل : i) العينة : الاشخاص الذي تسلموا الاستبيانات وعددهم 200 شخص.

المجتمع : جميع سكان احد الأحياء .

ii) اسلوب جمع البيانات هي دراسة مسحية اذ تؤخذ الاجابات من افراد العينة نحو الاستبانة .

iii) العينة غير متحيزة : لأن هذه العينة تتكون من اشخاص اختيروا عشوائيا .

9 **يريد صاحب معمل التحقق من أن العمال يعملون بشكل جيد فراقب احد العمال مدة ساعتين .**

الحل : i) العينة :احد عمال المعمل

المجتمع : جميع العمال داخل المعمل .

ii) اسلوب جمع البيانات هي دراسة مسحية لمراقبة اداء احد العمال .

iii) العينة غير متحيزة : لأن هذه العينة تتكون من احد العمال اختيروا عشوائيا

10 **يقف عدد من الطالبات عند مدخل المدرسة ويسألن كل عاشر طالبة تدخل المدرسة عن هوايتها المفضلة**

الحل : i) العينة :طالبة واحدة من كل عشرة طالبات

المجتمع : الطالبات المدرسة .

ii) اسلوب جمع البيانات هي دراسة مسحية اذ تؤخذ الاجابات من افراد العينة المختارة .

iii) العينة غير متحيزة : لأن هذه العينة تتكون من طالبات اختيروا عشوائيا .

اي مقاييس النزعة المركزية (ان وجدت) هو الأنسب لوصف البيانات التالية ؟ فسر اجابتك .

11 34 , 47 , 41 , 49 , 39 , 26 , 40

الحل : الوسط الحسابي $= \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$

الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{34+47+41+49+39+26+40}{7} = \frac{276}{7} = 39.4$

الوسط الحسابي : 39.4 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لعدم وجود قيمة متطرفة

المنوال :لا يوجد لعدم وجود تكرار في البيانات .

الوسيط : نرتب القيم تصاعديا : 49 , 47 , 41 , 40 , 39 , 34 , 26

الوسيط : 40 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات .

12 6 , 2 , 4 , 4 , 3 , 2 , 6 , 2 , 4 , 4 , 20

الحل :

الوسط الحسابي : غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة كبيرة متطرفة هي : 20 تؤثر في قيمة الوسط الحسابي .

المنوال : هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة واحدة متكررة اربع مرات هي : 4

الوسيط : نرتب القيم تصاعديا : 20 , 6 , 6 , 4 , 4 , 4 , 4 , 3 , 2 , 2 , 2

الوسيط : 4 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات .

13 5 , 3 , 5 , 8 , 5 , 3 , 6 , 7 , 4 , 5

الحل : الوسط الحسابي $= \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$

الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{5+3+5+8+5+3+6+7+4+5}{10} = \frac{51}{10} = 5.1$

الوسط الحسابي : 5.1 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لعدم وجود قيمة متطرفة .

المنوال : هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة واحدة متكررة اربع مرات هي : 5

الوسيط : نرتب القيم تصاعديا : 8 , 7 , 6 , 5 , 5 , 5 , 5 , 4 , 3 , 3

الوسيط $ME = \frac{5+5}{2} = \frac{10}{2} = 5$

الوسيط : 5 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات .



تدرب وحل المسائل الحياتية

مستشفى : يعد مستشفى مدينة الطب مجمعا طبيا متكاملا يقدم الخدمات للمواطنين في بغداد والمحافظات في ندوة تعريفية يتم اختيار طبيب من كل قسم عشوائيا ليقدم نبذة عن خدمات قسمه في المستشفى .

14 صف العينة والمجتمع .

15 هل العينة متحيزة أم لا ؟ فسر ذلك .

الحل : 14) العينة :طبيب من كل قسم .

المجتمع :أقسام مجمع مستشفى مدينة الطب .

15) العينة غير متحيزة : لأن الأطباء الذين اختيروا من كل قسم عشوائيا .

16 **تسوق :** يبين الجدول في ادناه عدد الزبائن الذين يرتادون محل لبيع الأجهزة الكهربائية في كل ساعة ي احد الايام . أي مقاييس النزعة المركزية هو الأنسب لوصف البيانات .

عدد الزبائن			
86	86	71	79
86	79	32	88
70	82	69	71
86	86	81	85

الحل :

الوسط الحسابي : غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة كبيرة متطرفة هي : 32 تؤثر في قيمة الوسط الحسابي .

المنوال : هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة واحدة متكررة خمس مرات : 86

الوسيط : نرتب القيم تصاعديا : 32,69,70,71,71,79,79,81,82,85,88,86,86,86,86,86

الوسيط $ME = \frac{81 + 82}{2} = \frac{83}{2} = 81.5$

الوسيط : 81.5 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات .

17 **تغذية :** يبين الجدول في ادناه السعرات الحرارية لبعض الخضروات في طبق لكل نوع أي مقاييس النزعة المركزية هو الأنسب لوصف البيانات .

الخضروات	السعرات	الخضروات	السعرات
بصل	16	خيار	13
فلفل	20	ذرة	66
ملفوف	17	سبانخ	9
جزر	28	كوسا	17

الحل :

الوسط الحسابي : غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة كبيرة متطرفة هي : 66 تؤثر في قيمة الوسط الحسابي .

المنوال : هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة واحدة متكررة مرتين: 17

الوسيط : نرتب القيم تصاعديا : 9,13,16,17,17,20,28,66

الوسيط $ME = \frac{17+17}{2} = \frac{34}{2} = 17$

الوسيط : 17هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات .



18 تحد : أوجد مجموعة من الاعداد يكون وسيطها اصغر من وسطها الحسابي .

الحل : الاعداد هي : 7 ,3 ,14 ,10 ,6

الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$

الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{6+10+14+3+7}{5} = \frac{40}{5} = 8$

الوسيط : نرتب القيم تصاعديا : 3,6,7,10,14

الوسيط = 7

19 أصحح الخطأ : تقول سناريا أن الوسط الحسابي هو انسب مقاييس النزعة المركزية لتمثيل البيانات : 20, 8, 4, 5, 3 حدد خطأ سناريا وصححه .

الحل :

الوسط الحسابي : غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة كبيرة متطرفة هي : 20 تؤثر في قيمة الوسط الحسابي .

المنوال : لا يوجد لعدم وجود تكرار .

الوسيط : نرتب القيم تصاعديا : 3,4,5,8,20

الوسيط : 5 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات

20 حس عددي : في دراسة مسحية حول الدوام في مدرسة ثانوية وزعت استبانة على 50 طالبا فكانت نسبة 74% من الطلاب يفضلون الدوام الصباحي . هل هذه الدراسة موثوق بها ؟ بين ذلك .

الحل : كلا ليس موثوق بها لأن الدوام يخص جميع الطلبة والأنسب تكون الاستبانة لجميع طلبة المدرسة .

اكتب سؤالا عن معني تريد اجابته من خلا دراسة مسحية .

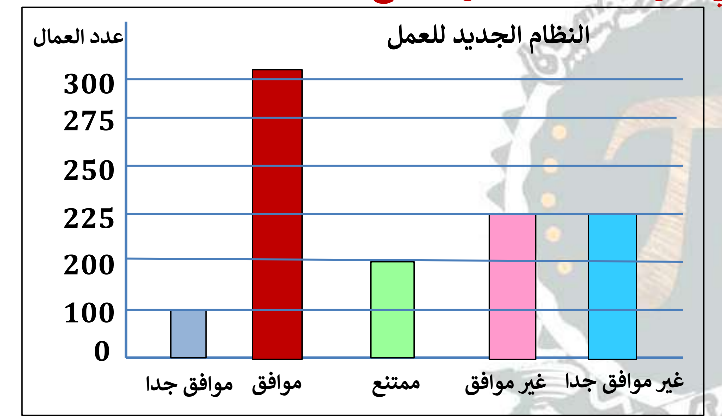
الحل : في الدراسة المسحية : يتبين كون العينة التي تؤخذ معقولة أم لا .

البيانات والإحصاءات المضللة

تميز البيانات المضللة

البيانات المضللة : هي البيانات التي تفرز صفة معينة لسلعة على نحو مبالغ فيه وعرض لحقائق بشكل يولد ادى الناظر انطباعا يروق لصاحب الاعلان وتظلل المستهلك .

مثال يفكر صاحب مصنع تطبيق نظام جديد في العمل فوزع استبانة على العمال يسألهم ن رأيهم في النظام الجديد . هل التمثيل بالأعمدة المجاور يعطي صورة صحيحة حول نتائج الاستبانة ؟

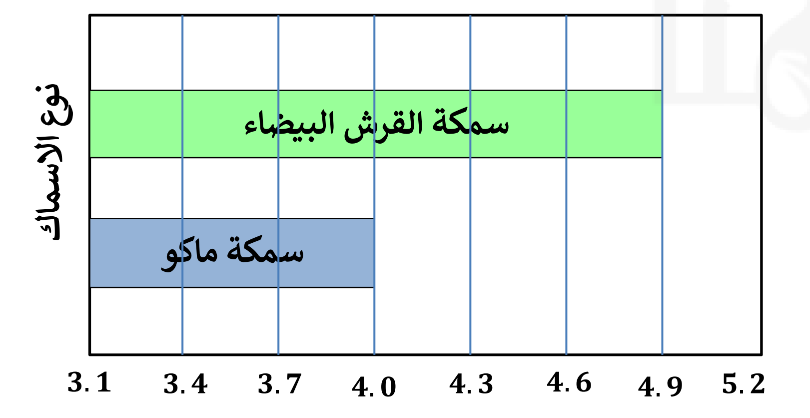


الحل :

أن معظم العمال موافقون على تطبيق النظام الجديد مع العلم ان اطوال المدة الزمنية للتدريج . لاحظ أن : 450 عامل غير موافقين أو غير موافقين جدا على هذا النظام الجديد في حين ان عدد الموافقين يزيد قليلا عن 300عامل فقط . فأن التمثيل البياني المعروض مضلل والاستنتاج غير صادق .

ملاحظة الرسم البياني قد يكون مضللا بإطالة أو تقصير الفترات بين قيم البيانات وذلك لإعطاء انطباع معين .

مثال الرسم البياني المجاور يوضح العلاقة بين طولي القرش البيضاء الكبيرة وطول سمكة لقرش ماكو . ين هل الرسم البياني مضلل ؟ وضح ذلك .



الحل :

نلاحظ ان طول العمود العلوي ضعف طول العمود السفلي . ولكن القيمة المناظرة لطول العمود العلوي هي 4.9 والقيمة المناظرة لطول العمود السفلي هي 4 بالتأكيد قيمة 4.9 ليست ضعف 4 وعليه الرسم البياني المجاور مضلل .

تميز الاحصاءات المضللة

الاحصاءات المضللة : بالإضافة الى الرسوم المضللة تستعمل الاحصاءات المضللة بهدف الترويج لشركة أو بضاعة معينة بأنعام النظر جيدا في معطيات الاعلان يمكن تميز الاحصاءات المضللة .

مثال وضع صاحب محل للملابس الرجالية الاعلان الآتي :
(بدلات رجالية جديدة متوسط السعر 45 الف دينا) في المحل 5 نماذج من البدلات اسعارها بالالف
54, 50, 20, 48, 53

الحل :

متوسط سعر البدلات $\bar{x} = \frac{54 + 40 + 20 + 48 + 53}{5} = 45$

لاحظ أن متوسط سعر البدلات هو 45 الف دينار الأ أن بدلة واحدة سعرها 20 الف دينار حيث يقل سعرها عن هذا المتوسط . وهذا يجعل الزبون سوف يدفع اكثر من هذا السعر ثمنا للبدلة .

مثال **في استطلاع على 800 طالب اعدادية افاد 70 منهم انهم يرغبون دخول كلية الهندسة فيما قال 50 منهم بانهم يرغبون دخول كلية الطب . جاء في نتائج الاستطلاع ان الطلاب يفضلون لهندسة على الطب .**

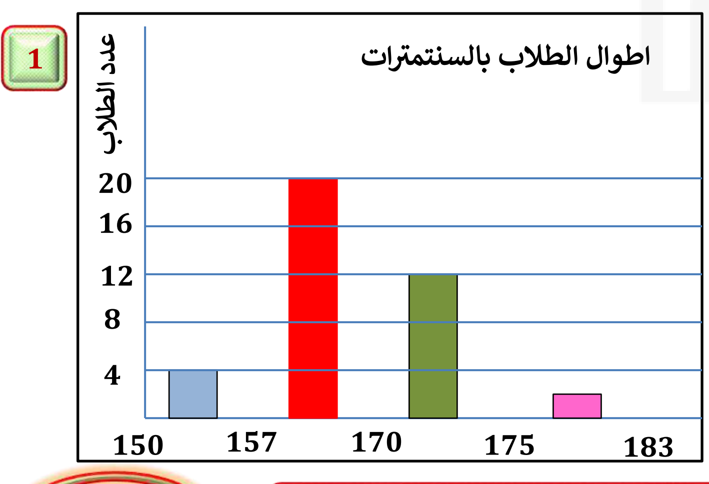
الحل : ان مجموع الطلاب الذين شملهم الاستطلاع فعلا هو : $(70 + 50 = 120)$ طالبا من أصل 800 طالب أي أن العينة العشوائية كانت صغيرة جدا . النسبة المئوية لطلاب الذين شملهم الاستطلاع تساوي :

$$\frac{120}{800} \times 100 = 15\%$$

تأكد من فهمك

وضح كيف يمكن أن يولد كل من رسمين البيانيين التاليين انطباعا مضللا :

1

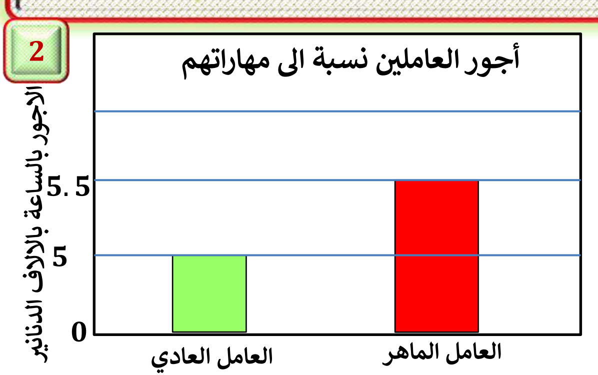


الحل :

الرسم البياني يعطي انطباعا مضللا :

لأن النسب بين الأطوال غير متساوية وذلك لكون ان النسبة الأولى هي : $150 - 157$(بينهما 7cm)
والنسبة الثانية : $157 - 170$ (بينهما 13cm)
كذلك هو الحال في النسبة الثالثة : $170 - 175$ (بينهما 5cm) .

2



الحل :

من الشكل المجاور نلاحظ ان أجور العامل الماهر ضعف أجور العامل العادي . ولكن أجرة العامل الماهر بالساعة هي 5.5 الف دينار وأجرة العامل العادي بالساعة هي 5 الالف دينار . بالتأكيد 5.5 ليست ضعف 5 .عليه الرسم البياني المجاور مضلل .

فسر لماذا الاحصاءات التالية مضللة :

3 **عرض مقال على 20 شخصا لتقويمه أبدى 13 منهم اعجابهم بالمقال بناء على ذلك صرح صاحب المقال بأن المقال صالح للنشر لأن نسبة الذين فضلوه كانت 13 الى 7**

الحل : الاحصاء مضللا لأن :

1) يجب أن يكون عرض المقال بشكل عشوائي وليس انتخابي .
2) يجب أن يحدد رأي الأشخاص الـ (7) حول المقال .

---

4 **باع مخزن ملابس رياضية لمدة زمنية معينة 320 بدلة رياضية في حين باع مخزن لبيع الألعاب والملابس الرياضية وللمدة نفسها 90 بدلة رياضية.**

الحل : الاحصاء مضللا لأن : الزمن ليس قياس لبيع البدلات الرياضية وانما :

1) يجب أن تكون البضاعة تمثل نفس النوعية ومن نفس المنشأ .
2) الأسعار التي تباع بها البضاعة يجب أن تكون متساوية .
3) موقع المخزنين يؤثر ونوع الزبائن والقدرة الشرائية .
4) الفترة الزمنية لفتح المخزن واغلاقه يوميا .
5) أسلوب البائع في طرح البضاعة وكيفية تعامله مع الزبائن .

تدرب وحل التمرينات

وضح كيف يمكن أن يولد كل من الرسمين البيانيين التاليين انطباعا مضللا :

5



الحل :

الرسم يولد انطباعا مضللا :

وذلك لأن الأعمدة توضح أن هنالك فرق بين البضاعتين (2 – 1) طن ولكن الواقع في تحديد نسب المبيعات نلاحظ ان الفرق بينهما 9 طن .

07703153998 اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين

6

= 100	
= 50	
= 20	

الحل :

هنالك تضليل لأن النسبة بين الرسم والعدد غير متساوية للمواد حيث عدد الكرات المرسومة (4) كرات وعدد الكرات في خانة الأعداد (20) كرة حيث أن النسبة هي : (2 من 10)

بينما في الخانة العليا (الصناديق) هنالك خمس صناديق وفي خانة العدد هناك 50 صندوق أي أن النسبة هي : (1 من 10) .

---

7 **في استطلاع شمل 6 أشخاص حول مطالعة جريدة يومية افاد 4 منهم انهم يفضلون الجريدة (X) في نهاية الاستطلاع وردت الجملة الآتية : يفضل 2 من كل 3 شخاص مطالعة الجريدة (X) لماذا يعد هذا الاعلان مضللا .**

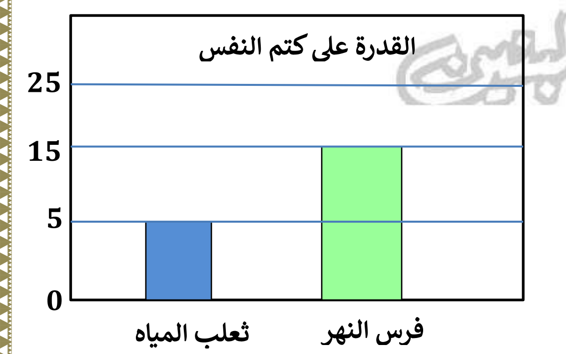
الحل : يعد هذا الإعلان مضللا لأن الاستطلاع شمل 6 أشخاص فقط فيجب أن يكون الاستطلاع عشوائي ويشمل أعداد كبيرة من الأشخاص ولكلا الجنسين ولأعمار متفاوتة ولطبقات مثقفة .

---

8 **سئل 100 طالب ن الطريقة التي يفضلونها في القدوم الى المدرسة فكانت إجابات 60 طالبا منهم على النحو الآتي : 32 منهم يفضلون القدوم بواسطة سيارة الاجرة و 18 يفضلون المشي و 10 طلاب يفضلون القدوم سياراتهم الخاصة . أستنتج أن نصف الطلاب يفضلون سيارة الأجرة . فسر لماذا الاحصاءات مضللة**

الحل : الاحصاءات مضللة لأن الذين يفضلون سيارة الأجرة في القدوم الى المدرسة يمثل تقريبا $\left(\frac{1}{3}\right)$ ثلث إجابات 60 طالبا والاحصاء يجب أن يكون على عدد الطلاب 100 وليس على 60 طالب .

تدرب وحل مسائل حياتية



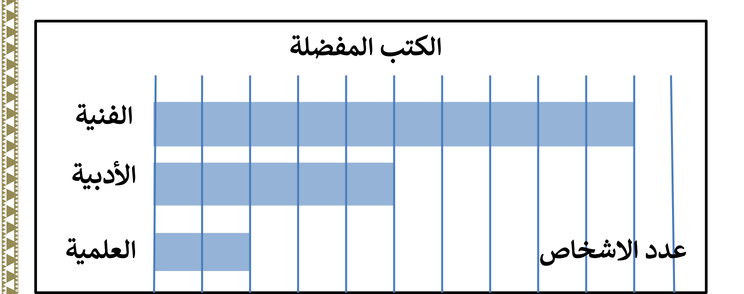
9 **الأحياء : الرسم البياني المجاور يمثل القدرة على كتم النفس لفرس النهر وثعلب المياه . لماذا البيانات في الرسم مضللة ؟ وضح ذلك .**

الحل : البيانات في الرسم البياني مضللة :

1) لأن القدرة على كتم النفس في الأعمدة البيانية تبين بأن فرس النهر له قدرة ضعف قدرة ثعلب المياه ولكن في القيم العمودية للرسم البياني فأن قدرة فرس النهر ثلاث أمثال قدرة ثعلب المياه في كتم النفس .

2) لم يحدد في البيانات العمودية للرس البياني التي تمثل الوقت هل هو دقائق أم ساعات أم أيام وهذا يعتبر مضللا ايضا .

10 مطالعة : الرسم المجاور يمثل اشخاص يفضلون مطالعة الكتب الأدبية , العلمية , الفنية .



فسر لماذا البيانات في الرسم مضللة ؟

الحل :

في البيانات للأعمدة الأفقية يتبين بأن قراءة الكتب الفنية اكبر من مجموع الذين يفضلون قراءة الكتب الأدبية والعلمية والواقع ان عدد قراء الذين يفضلون الكتب العلمية بالاضافة الى عدد قراء الكتب الأدبية اكبر من عدد الذين يفضلون الكتب الفنية لذلك فأن البيانات في الرسم مضللة .

11 مواصلات : بلغت ارباح شركة الطيران A في شهري تموز وآب 5500 مليون دينار في حين كانت اربح شركة الطيران B في شهري نيسان ومايس 7500 مليون دينار . فسر لماذا الاحصاءات مضللة ؟

الحل : الاحصاءات مضللة لأن مقارنة الأرباح غير متطابقة فالشركة A أرباحها لشهري تموز وآب 5500 مليون دينار وأما الشركة B فأن ارباحها لشهري نيسان ومايس 7500 مليون دينار .

12 تغذية : تحتوي قصبة لبروكلي على 447mg من البوتاسيوم الجزرة الكبيرة 230mg ن البوتاسيوم في حين يحتوي رأس القرنبيط على 803mg من البوتاسيوم . فسر لماذا الاحصاءات هذه مضللة ؟

الحل : الاحصاءات مضللة لأن المقارنة بين المواد الغذائية مختلفة .



13 اكتشف الخطأ : يقول محمد أن الرسم يكون غير مضلل اذا بدأ رسم الأعمدة من الصفر بصرف النظر عن ثبوت طول الفترات . اكتشف خطأ محمد .

الحل : يكون الرسم البياني مضللا اذا كان رسم الأعمدة لا يبدأ من الصفر وعدم ثبوت طول الفترة .

14 حس عددي : صل احد الباعة على العمولات التالية بالألاف الدنانير : شباط 965 , اذار 170 نيسان 120 , تموز 125 , مايس 100 . اخبر اصدقاءه أن متوسط عمولته الشهرية 265 الف دينار . فسر لماذا هذا الاحصاء مضلل ؟

الحل : لأن متوسط العمولة الشهرية 265 الف دينار هو ربع عمولة شهر شباط تقريبا وكذلك فأن متوسط العمولة يساوي ضعف العمولة للأشهر نيسان وتموز ومايس تقريبا .

15 ما الذي يجب أن تتأكد منه لتقرر ما اذا كان الرسم لبياني مضللا أم لا ؟

الحل : 1) يبدأ الرسم البياني للأعمدة من الصفر .

2) ثبوت الفترات المحددة في الرسم البياني .

التباديل والتوافيق

المضروب

اذا كان : n عددا صحيحا غير سالب ((موجب)) فأن مضروب العدد n يرمز له n! ويعرف كالاتي :

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots(2)(1)$$

وان : $0! = 1 \ , \ 1! = 1$

مثال دخل 4 اشخاص الى غرفة تحتوي على 4 كراسي في صف واحد وطلب منهم الجلوس على تلك الكراسي . فكم طريقة يمكن أن يجلسون ؟

الحل :

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ طريقة

مثال جد قيمة كل مما يأتي :

i) $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

ii) $4! - 2! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 - 2 \times 1 = 24 - 2 = 22$

iii) $\frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 6 = 42$

iv) $3! \times 2! = (3 \times 2 \times 1)(2 \times 1) == 6 \times 2 = 12$

v) $\frac{(6-2)!}{0!} = \frac{4!}{1} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 24$

vi) $\frac{6!}{3 \times 6} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 6} = 5 \times 4 \times 2 \times 1 = 40$



ليكن : n, r عددا طبيعيا ((موجب)) حيث : $r \leq n$ ويرمز للتباديل بالرمز :

$P(n, r)$, P_r^n وتقرأ تباديل n مأخوذة منه r

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

لاحظ أن : $P_0^n = 1 , P_1^n = n , P_n^n = n!$



جد قيمة كل مما يأتي :

$$\text{i) } P_2^7 = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 6 = 42$$

طريقة اخرى

$$P_2^7 = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$$

$$\text{ii) } P_3^3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$\text{iii) } P_1^9 = 9 \qquad \text{v) } P_0^{10} = 1$$



ملاحظة : يمكن معرفة حل السؤال وفق مفهوم التباديل من منطوق السؤال في الحالات الآتية فقط .

1. الترتيب مطلوب .
2. طلب تكوين لجان وحدد لها مناصب مثل رئيس ، نائب رئيس ,.........
3. طلب تكوين اعداد من مجوعة أرقام ((بشرط عدم تكرار الرقم – دون ارجاع - مختلفة)) .
4. طلب حل اسئلة امتحان مادة ما ((بشرط عدم ترك أي سؤال)) .
5. اسئلة ترتيب صف في مستقيم أو الجلوس على كراسي .

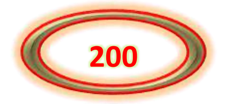
مثال

لوحة ارقام : لعمل لوحات ارقام مكونة من خمسة ارقام من بين الارقام 1 الى 9 ما عدد الترتيبات المختلفة الممكنة .

الحل : ترتيب الارقام مهم

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \quad , \quad n = 9 , r = 5$$

$$P_5^9 = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$$



اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998



ليكن : n, r عددا طبيعيا ((موجب)) حيث : $r \geq n$ ويرمز للتوافيق بالرمز :

$\binom{n}{r}$, $C(n,r)$, C_r^n وتقرأ توافيق n مأخوذة منه r

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

لاحظ أن : $C_0^n = 1 , C_1^n = n , C_n^n = 1$

مثال جد قيمة كل مما يأتي :

$$i)\ C_2^8 = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8!}{2!\,6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{2 \times 1 \times 6!} = 4 \times 7 = 28$$

$ii)\ C_{12}^{12} = 1$ $\quad iii)\ C_1^9 = 9$ $\quad iv)\ C_0^{50} = 1$ حسب الملاحظة



يمكن معرفة حل السؤال وفق مفهوم التوافيق من منطوق السؤال كالاتي :

- اذا كان لدينا عملية سحب أو تكوين لجنة أو فريق والترتيب فيها غير مطلوب .
- اذا طلب بالسؤال عدد طرق تكوين لجنة أو فريق ولم يحدد لها مناصب .
- طلب عدد المجموعات الجزئية ((الثنائية : $r = 2$ والثلاثية : $r = 3$, ...)) .
- طلب عدد الأشكال الهندسية ((خط مستقيم : $r = 2$, المربع : $r = 4$, المثلث : $r = 3$))
- طلب حل اسئلة امتحان مادة ما وفيها ترك في الاجابة عن الأسئلة .

مثال وظائف : أعلنت شركة عن 4 وظائف شاغرة فتقدم 10 أشخاص بكم طريقة يمكن شغل الوظائف الأربع ؟

الحل : ترتيب الوظائف غير مهم

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad , \quad n = 10 , r = 4$$

$$C_4^{10} = \frac{10!}{4!\,(10-4)!} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 6!} = 10 \times 3 \times 7 = 210$$





تأكد من فهمك

جد قيمة كل مما يأتي :

1) $4! \times 2! = (4 \times 3 \times 2 \times 1)(2 \times 1) = 24 \times 2 = 48$

2) $(3 + 2)! = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

3) $\frac{9!}{6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 9 \times 8 \times 7 = 504$

4) $(7 - 5)! = 2! = 2 \times 1 = 2$

5) $3! + 2! = 3 \times 2 \times 1 + 2 \times 1 = 6 + 2 = 8$

6) $\frac{10!}{4! \times 5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5!} = 10 \times 9 \times 2 \times 7 = 1260$

7) $P_8^8 = 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$

8) $P_4^{10} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

9) $P_0^{20} = 1$

10) $C_3^8 = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3 \times 2 \times 1 \times 5!} = 8 \times 7 = 56$

11) $\binom{9}{0} = 1$ 12) $C_8^8 = 1$

تدرب وحل التمرينات

جد قيمة كل مما يأتي :

13) $2! \times 6! = (2 \times 1)(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 2 \times 720 = 1440$

14) $4! \times 3! = (4 \times 3 \times 2 \times 1)(3 \times 2 \times 1) = 24 \times 6 = 144$

15) $0! \times 1! = 1 \times 1 = 1$

16) $\frac{3! \times 0!}{1!} = \frac{3 \times 2 \times 1 \times 1}{1} = 6$

17) $\frac{10!}{(9-2)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$

18) $\frac{(7-2)!}{(3+2)!} = \frac{5!}{5!} = 1$

19) $P_0^{10} = 1$ 20) $\binom{10}{1} = 10$

21) $C_5^9 = \frac{9!}{5!\,(9-5)!} = \frac{9!}{5!\,4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 9 \times 2 \times 7 = 126$

22) $P_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$

23) $P_1^{15} = 15$ 24) $C_{100}^{100} = 1$

تدرب وحل المسائل الحياتية

25 لجان : بكم طريقة يمكن اختيار لجنة ثلاثية من بين هيئة مكونة من 5 شخصا ؟

الحل : ترتيب غير مهم

$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$, $n = 5, r = 3$

$C_3^5 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} = 5 \times 2 = 10$

26 لجان : بكم طريقة يمكن اختيار لجنة ثلاثية مكونة من رئيس ونائب الرئيس وأمين الصندوق من بين هيئة مكونة من 5 شخصا ؟

الحل : تحديد مناصب يحل بالتباديل

$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$, $n = 5, r = 3$

$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$

27 شطرنج : في التصفية النهائية لبطولة الشطرنج في احدى المدارس بين اربعة طلاب . كم عدد المباريات التي يمكن اجراؤها للتصفية ؟

الحل : ترتيب غير مهم يحل بالتوافيق

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad , \quad n = 4 , r = 2$$

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2 \times 1} = 2 \times 3 = 6$$

---

28 **لوحات :** رسم فنان 7 لوحات فنية فبكم طريقة يمكن اختيار 5 لوحات منها لعرضها في معرض فني ؟

الحل : ترتيب غير مهم يحل بالتوافيق

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad , \quad n = 7 , r = 5$$

$$C_5^7 = \frac{7!}{5!\,(7-5)!} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2 \times 1} = 7 \times 3 = 21$$

---

29 **اختيار :** ورقة اسئلة تحتوي على 12 سؤالا المطلوب الاجابة عن 10 اسئلة . بكم طريقة يمكن اختيار الاسئلة ؟

الحل : الاسئلة تحتوي على ترك تحل بالتوافيق

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad , \quad n = 12 , r = 10$$

$$C_{10}^{12} = \frac{12!}{10!\,(12-10)!} = \frac{12!}{10!\,2!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{10! \times 2 \times 1} = 6 \times 11 = 66$$

---

30 **رياضة :** أراد مدرس الرياضة اختيار فريق لكرة السلة من أصل 9 لاعبا . بكم طريقة يمكنه تشكيل الفريق ؟

الحل : ترتيب غير مهم يحل بالتوافيق . عدد لاعبين كرة السلة هم 5 لاعبين

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad , \quad n = 9 , r = 5$$

$$C_5^9 = \frac{9!}{5!\,(9-5)!} = \frac{9!}{5!\,4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 9 \times 2 \times 7 = 126$$



31 عصائر : **كم خيار لدى تمارة لاختيار 3 اقداح من أقداح تحتوي على عصير الفواكه الآتية : ليمون , تفاح , عنب , موز ؟**

الحل : عدد انواع الفواكه 4 . الترتيب غير مهم يحل بالتوافيق

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad , \quad n = 4\,, r = 3$$

$$C_3^4 = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = \frac{4!}{3!\,1!} = \frac{4 \times 3!}{3! \times 1} = 4$$

فكر

32 تحد : **جد قيمة :**

$$\text{i)}\ \frac{15!\,9!}{14!\,10!} = \frac{15 \times 14! \times 9!}{14! \times 10 \times 9!} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ii)}\ \frac{5!}{3! \times 1!} \times \frac{6!}{5! \times 4!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 1} \times \frac{6 \times 5!}{5! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5 \times 4 \times \frac{1}{4} = 5$$

---

33 أيهما صحيح : **اختيار لجنة من 4 طلاب من مجموعة 7 طلاب فان عدد الاختيارات اما P_4^7 أم C_4^7 فسر اجابتك .**

الحل : الترتيب غير مهم يحل بالتوافيق

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad , \quad n = 7\,, r = 4$$

$$C_4^7 = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 5 = 35$$

---

34 تبرير : **متى تكون : $C_r^n = P_r^m$ ؟**

الحل : تكون : $C_r^n = P_r^m$ اذا كانت : $r = 0$,

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين

07703153998


35 تفكير ناقد : ما العلاقة بين تراتيب 3 من أصل 5 وتوافيق 3 من أصل 5 ؟ اكتب هذه العلاقة من خلال حسابك لكل منهما .

الحل :

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \quad , \qquad n = 5 , r = 3$$

$$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad , \qquad n = 5 , r = 3$$

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} = 5 \times 2 = 10$$

$$P_3^5 = 6C_3^5$$

36 مسألة عددية : جد قيمة n التي تجعل : $\frac{n!}{(n-1)!} = 9$

الحل :

$$\frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = 9 \quad \Rightarrow \quad n = 9$$

اكتب مسألة لاختيار 2 ن بين 5 اشياء على ان يكون الترتيب فيها مهما .

الحل : الترتيب مهم يحل بالتباديل

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \quad , \qquad n = 5 , r = 2$$

$$P_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

الاحتمال التجريبي والاحتمال النظري

الاحتمالات التجريبية : هو تحديد الاحتمال في الفقرة عن طريق اجراء التجربة والنواتج بهذه الطريقة .

الاحتمالات النظرية : ي الاحتمالات المبينة على حقائق وخصائص عروفة .

مثال رمى مهند قطعتي نقود 13 مرة وسجل النتائج كما مبين في الجدول المجاور :

أوجد النسبة بين عدد ظهور (H, T) الى عدد عناصر فضاء العينة . اوجد النسبة بين عدد ظهور (H, T) الى عدد مرات التجربة . هل النسبة في السؤال الأول ساوي النسبة في السؤال الثاني ؟ وضح ذلك .

التكرار	النتائج
7	H , H
3	H , T
1	T , H
2	T , T

الحل : فضاء العينة لتجربة رمي قطعتي نقود هي : $\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$

$\therefore$ عدد عناصر فضاء العينة يساوي 4

الاحتمال نظري

$$\therefore\ P(H, T) = \frac{\text{(H, T) عدد ظهور}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}} = \frac{3}{4}$$

عدد مرات التجربة يساوي 13

الاحتمال تجريبي

$$\therefore\ P(H, T) = \frac{\text{(H, T) عدد ظهور}}{\text{عدد مرات التجربة}} = \frac{3}{13}$$

ملاحظة

الاحتمالات النظرية تزودنا بنتائج التجربة دون الحاجة الى اجرائها (تعتمد على فضاء العينة للتجربة)

الاحتمالات التجريبية تزودنا بنتائج التجربة تكرارها عدة مرات (تعتمد على تكرار التجربة)

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998

مثال وجد باحث في مصنع بطاريات السيارات ان احتمال كون البطارية غير صالحة هو $\frac{3}{10}$ نظري هذا الاحتمال أم تجريبي ؟ واذا اراد المصنع الحصول على 240 بطارية غير صالحة . فكم بطارية كان على المصنع انتاجه ؟

الحل : هذا الاحتمال تجريبي لأنه يعتمد على ما حدث فعلا

كل 3 بطاريات من أصل 10 غير صالحة

نفرض عدد البطاريات التي ينتجها المصنع هو x . ذن 240 بطارية غير صالحة من أصل x

$$\frac{3}{10} = \frac{240}{x}$$ الطرفين في الوسطين

$$3x = 2400 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2400}{3} = 800$$

يجب ان ينتج المصنع 800 بطارية

مثال عند رمي حجري النرد مرة واحدة جد احتمال :

i) الحدث : الحصول على المجموع 5 على وجهي الحجرين .

ii) الحدث : الرقم على وجه الحجر الأول ضعف الرقم على وجه الحجر الثاني

الحل : هذا الاحتمال نظري لأن الحجرين رميا مرة واحدة .

عدد أرقام الحجر الأول = 6 وعدد أرقام الحجر الثاني = 6

∴ حسب قانون العد الأساسي : عدد عناصر فضاء العينة = 6 × 6 = 36

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6) \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{matrix}\right\} \quad n = 36$$

الحدث : مجموع 5 على وجهي الحجر

i) $E_1 = \{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\} \quad m = 4$

$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

الحدث : رقم الحجر الأول ضعف رقم الحجر الثاني

ii) $E_2 = \{(1,2),(4,2),(6,3)\} \quad m = 3 , n = 36$

$$P(E_2) = \frac{m}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

الأحداث المتنافية

الحدثان المتنافيان : ما حدثان لا يمكن ان يتحققا معا في تجربة واحدة .

مثلا : عند رمي حجر النرد مرة واحدة فان الحصول على عدد فردي وعدد زوجي معا مستحيل . اذن هما حدثان متنافيان .

حساب احتمال الحدثين المتنافيين :

اذا كان : E_1, E_2 حدثين متنافيين فان احتمال وقوع E_1 أو وقوع E_2 يساوي مجموع احتمالي الحدثين . أي :

$$P(E_1 or E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

مثال عند رمي حجر النرد مرة واحدة جد احتمال الحصول على العدد 3 أو على عدد زوجي .

الحل : لا يمكن ان يظهر على وجه الحجر العدد 3 في الوقت نفسه مع عدد زوجي فان هذين الحدثين متنافيين .

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \quad n = 6$ فضاء العينة

احتمال الحصول على العدد 3 $\Leftarrow$ $m = 1$ هو :

$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$$

احتمال الحصول على عدد زوجي : $m = 3$ هو :

$$P(E_2) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6}$$

$$P(E_1 or E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

$$P(E_1 or E_2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

مثال عند رمي حجري النرد مرة واحدة جد احتمال الحصول على عددين متساويين أو مجموع عددين يساوي 3

الحل : عدد عناصر فضاء العينة عند رمي حجري النرد $= 6 \times 6 = 36$

احتمال الحصول عددين متساويين $m = 6 , n = 36$ $\quad E_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$



اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

$$P(E_1)=\frac{m}{n}=\frac{6}{36}$$

$E_2=\{(1,2),(2,1)\}$ $m=2\ ,n=36$ احتمال على الحصول مجموع عددين يساوي 3

$$P(E_2)=\frac{m}{n}=\frac{2}{36}$$

E_1, E_2 حدثان متنافيان لا توجد عناصر مشتركة بينهما .

$$P(E_1orE_2)=P(E_1)+P(E_2)\quad\Longrightarrow\quad P(E_1orE_2)=\frac{6}{36}+\frac{2}{36}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$



في تجربة رمي حجري النرد مرة واحدة جد احتمال حدوث الأحداث الآتية :

1 العددان على وجهي الحجرين متساويان .

الحل : عدد عناصر فضاء العينة عند رمي حجري النرد $= 6\times 6 = 36$

$E=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ $m=6\ ,n=36$ احتمال الحصول وجهي متساويين

$$P(E)=\frac{m}{n}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

2 العدد على وجه الحجر الأول نصف العدد على وجه الحجر الثاني .

الحل : عدد عناصر فضاء العينة عند رمي حجري النرد $= 6\times 6 = 36$

$E=\{(1,2),(2,4),(3,6)\}$ $m=3\ ,n=36$ الحدث : رقم الحجر الأول نصف رقم الحجر الثاني

$$P(E)=\frac{m}{n}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

3 مجموع العددين على وجهي الحجرين يساوي 10

الحل : عدد عناصر فضاء العينة عند رمي حجري النرد $= 6\times 6 = 36$

$E=\{(4,6),(6,4),(5,5)\}$ $m=3\ ,n=36$

$$P(E)=\frac{m}{n}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

4 **مجموع العددين على وجهي الحجرين أقل من 5**

الحل : عدد عناصر فضاء العينة عند رمي حجري النرد = $6 \times 6 = 36$

$E = \{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,2)\}$ $m = 6 , n = 36$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

5 **اتجريبية الاحتمالات السابقة أم نظرية ؟**

الحل : الاحتمالات السابقة نظرية لكون الحجران رميا مرة واحدة ((لأنها تعتمد على فضاء العينة)).

6 **كيس فيه 4 كرات حمر وكرة خضراء . كم كرة زرقاء يجب ان تضاف الى الكيس كي يكون احتمال سحب كرة حمراء $\frac{2}{3}$ ؟ انظري الاحتمال أم تجريبي ؟**

الحل : نضع كرة زرقاء واحدة فقط في الكيس ليصبح عدد الكرات في الكيس (6) كرات .
الاحتمال تجريبي لأن عملية السحب ستتكرر عدة مرات .

7 **وقف شخص في احدى تقاطعات مدينة بغداد فأحصى 25 سيارة شاهدها فيها 13 سيارة صفر اللون و 7 سيارات بيض اللون و 5 سيارات رصاصية اللون . قدر احتمال ان تكون السيارة الثالثة التي تجتاز التقاطع صفراء اللون . وما نوع الاحتمال انظري أم تجريبي ؟ اكتب النسبة بشكل كسر عشري ونسبة مئوية .**

الحل : فضاء العينة = $25 \Leftarrow n = 25$, الحدث 13 سيارة صفراء $m = 13$

احتمال قدوم سيارة صفراء $P(E) = \frac{m}{n} = \frac{13}{25}$

الاحتمال تجريبي

$$\frac{13}{25} = \frac{13 \times 4}{25 \times 4} = \frac{52}{100} = 0.52 = 52\%$$

8 **عند رمي حجري نرد جد احتمال الحصول على عددين مجموعهما 5 أو مجموعهما 11 هل الحدثان متنافيان بين ذلك .**

الحل : عدد عناصر فضاء العينة عند رمي حجري النرد = $6 \times 6 = 36$

احتمال على الحصول مجموع عددين يساوي 5 $E_1 = \{(2,3),(3,2),(1,4),(4,1)\}$ $m = 4 , n = 36$



اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{4}{36}$$

احتمال على الحصول مجموع عددين يساوي 11 $E_2 = \{(5,6),(6,5)\} \quad m = 2, n = 36$

$$P(E_2) = \frac{2}{36}$$

E_1, E_2 حدثان متنافيان لا توجد عناصر مشتركة بينهما .

$$P(E_1 or E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

$$P(E_1 or E_2) = \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

تدرب وحل التمرينات

في تجربة رمي حجري النرد مرة واحدة جد احتمال حدوث الأحداث الآتية :

9 **العدد على وجه احد الحجرين ثلث العدد على وجه الحجر الاخر .**

الحل : عدد عناصر فضاء العينة عند رمي حجري النرد $= 6 \times 6 = 36$

$E = \{(1,3),(2,6)\} \quad m = 2, n = 36$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

---

10 **مجموع العددين على وجهي الحجرين اكبر من 8**

الحل : عدد عناصر فضاء العينة عند رمي حجري النرد $= 6 \times 6 = 36$

$E = \{(4,5),(5,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\} \quad m = 6, n = 36$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

---

11 **مجموع العددين على وجهي الحجرين يساوي 12**

الحل : عدد عناصر فضاء العينة عند رمي حجري النرد $= 6 \times 6 = 36$



$E = \{(6,6)\} \quad m = 1 , n = 36$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{1}{36}$$

12 اجريت دراسة على 100 شخص فأجاب 15 منهم انهم يستعملون اليد اليسرى فاذا اجريت الدراسة على 400 شخص . فكم تتوقع عدد الاشخاص الذين يستعملون اليد اليسرى .

الحل : نفرض عدد الاشخاص الذين يستعملون اليد اليسرى X

$$\frac{15}{100} = \frac{X}{400}$$ الطرفين في الوسطين

$$100X = 6000 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{6000}{100} = 60$$

13 الجدول المجاور يبين نتائج دراسة احصائية عن الكتب المفضلة لدى اشخاص

i) ما احتمال ان يفضل الشخص التالي الكتب العلمية ؟

ii) ما احتمال ان يكون الشخص التالي لا يفضل الكتب العلمية ؟

الكتب	الاشخاص
دينية	25
علمية	30
رياضية	45

الحل : مجموع الاشخاص 100

i) الاشخاص الذين يفضلون الكتب العلمية 30 $\Leftarrow \quad m = 30 , n = 100$

$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

ii) الاشخاص الذين لا يفضلون الكتب العلمية $25 + 45 = 70 \quad \Leftarrow \quad m = 70 , n = 100$

$$P(E_2) = \frac{m}{n} = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$$

14 جد احتمال سحب بطاقة تحمل عددا فرديا أو تحمل عدد من مضاعفات العدد 2 من بطاقات مرقمة من 1 الى 9

الحل : فضاء العينة : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\ , n = 9$

احتمال سحب بطاقة تحمل عددا فرديا $E_1 = \{1,3,5,7,9\}\quad m = 5 , n = 9$

$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{5}{9}$$

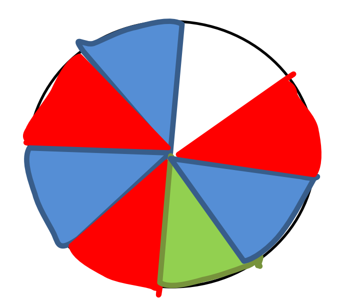
احتمال سحب تحمل مضاعفات العدد 2 $E_2 = \{2,4,6,8\}\quad m = 4 , n = 9$

$$P(E_2) = \frac{m}{n} = \frac{4}{9}$$

$$P(E_1 or E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

$$P(E_1 or E_2) = \frac{5}{9} + \frac{4}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

تدرب وحل مسائل حياتية



15 تسلية : بأي لون يجب تلوين الفراغ بحيث يكون احتمال ن يأتي المؤشر عند هذا اللون $\frac{1}{4}$ ؟

الحل : تلوين الفراغ باللون الأخضر

16 طوابع : يهوى مهند جمع الطوابع البريدية فمن بين 60 طابعا جمع 25 طابعا للدول العربية , 15 طابعا لدول افريقية و 20 طابعا لدول أوربية . قدر احتمال أن يكون الطابع ذي سيجمعه أوربيا .

الحل : فضاء العينة $n = 60$, عدد طوابع الدول الأوربية $m = 20$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

17 رياضية : في تدريب كرة السلة اصاب لاعب كرة السلة 15 كرة من بين 25 رمية ما احتمال التجريبي لان يصيب لاعب السلة في الرمية التالية ؟ اكتب الجواب على صورة كسر وعدد عشري ونسبة مئوية .

الحل : فضاء العينة (عدد الرميات) $n = 25$, عدد الرميات التي فيها اصابة $m = 15$

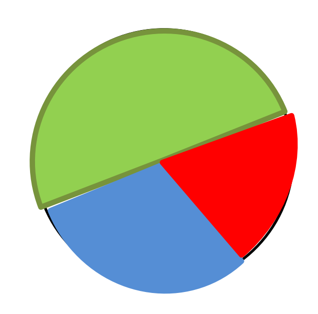
$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0.6 = 60\%$$

18 دراسة : احصى رجل في عائلته 3 أفراد عيونهم زرق من كل 22 فردا اذا رزق الرجل بمولود جديد , ما احتمال ان تكون عيناه ليست زرقاء ؟

الحل : فضاء العينة $n = 22$, الأفراد الذين ليسوا عيونهم زرقاء $m = 19 , (22 - 3 = 19)$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{19}{22}$$

فكر



19 تحد : قرص ذو مؤشر قسم الى ثلاثة أجزاء على الشكل المجاور : نصف القرص أخضر ثلثه أحمر سدسه أزرق . ما احتمال أن يدل مؤشر القرص على الأخضر أو الأحمر بعد اطلاقه ؟

الحل :

ثلثه أحمر $P(E_2) = \frac{1}{3}$, نصف القرص أخضر $P(E_1) = \frac{1}{2}$

$$P(E_1 or E_2) = P(E_1) + P(E_1) \Rightarrow P(E_1 or E_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

---

20 أكتشف الخطأ : يريد كل من سارة ومهند تحديد احتمال اختيار كرة زرقاء أو حمراء عشوائيا من كيس يحتوي على 5 كرات زرق , 4 كرات حمر , 6 كرات صفر ايهما كانت اجابته صحيحة ؟ فسر اجابتك .

سارة	مهند
$P(R \text{ or } B) = P(R) + P(B) = \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$	$P(R \text{ or } B) = P(R) \times P(B) = \frac{4}{15} \times \frac{5}{15} = \frac{4}{45}$

الحل : أجابه سارة هي الإجابة الصحيحة لأن الاختيار أما كرة زرقاء أو كرة حمراء فأن الاحتمال النهائي يكون جمع وليس ضرب .

اكتب توضيحا لما يمثله كل عدد في كسر $\frac{2}{9}$ الذي يمثل احتمال وقوع حدث نظري أو تجريبي ..

الحل : 2 يمثل عدد الاحتمالات (الحدث) .

9 تمثل فضاء العينة .

الأحداث المركبة

الأحداث المستقلة

الاحداث المستقلة ((نتيجة احدهما لا تؤثر في نتيجة الآخر))

اذا كان : E_1, E_2 حدثين مستقلين فأن احتمال وقوعهما معا يساوي حاصل ضرب احتمال E_1 في احتمال الحدث E_2 . أي أن :

$$P(E_1 and E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

مثال تعلم : تشير تقارير شركة الخطوط الجوية العراقية الى وصول طائراتها في موعدها المحدد بنسبة $\frac{19}{20}$ كما تشير النسبة 2% الى فقدان الأمتعة من الحالات . فما احتمال وصول طائرة في موعدها وبدون فقدان أمتعة ؟

الحل :

احتمال وصول الطائرة في موعدها هو $P(E_1) = \frac{19}{20}$

احتمال فقدان الأمتعة هو $P(E_2) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$

ان وصول الطائرة في موعدها لا يؤثر في فقدان الأمتعة هذا يعني أن الحدثين مستقلان .

$$P(E_1 and E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

$$P(E_1 and E_2) = \frac{19}{20} \times \frac{1}{50} = \frac{19}{1000} = 0.019 = 1.9\%$$

مثال كيس يحتوي على 3 كرات حمر , 4 كرات خضر , 5 كرات زرق سحبت منه كرة عشوائيا ثم اعيدت وسحبت كرة ثانية . جد احتمال سحب كرة حمراء ثم كرة خضراء .

الحل : العدد الكلي للكرات $(5 + 4 + 3 = 12)$

$$P(G) = \frac{\text{عدد الكرات الخضراء}}{\text{عدد الكلي للكرات}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad , \quad P(R) = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد الكلي للكرات}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

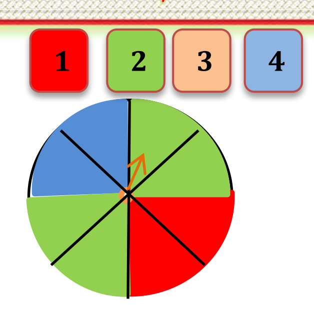
$$P(R \text{ and } G) = P(R) \times P(G)$$

$$P(R \text{ and } G) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$



اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998

مثال اذا اخترت احدى البطاقات المرقمة وتدوير مؤشر القرص الدوار كما مبين في الشكل المجاور . ما احتمال ان يكون الناتج عددا زوجيا واللون ازرق ؟



الحل : عدد الكلي للبطاقات 4

نفرض أن : $P(E_1)$ احتمال العدد الزوجي

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد البطاقات الزوجية}}{\text{عدد الكلي للبطاقات}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

نفرض أن : $P(E_2)$ احتمال وقوف المؤشر على اللون الأزرق .

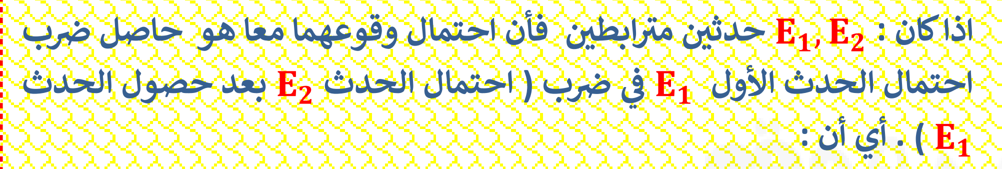
$$P(E_2) = \frac{\text{احتمال وقوف المؤشر على اللون الأزرق}}{\text{عدد الكلي للبطاقات}} = \frac{1}{4}$$

$$P(E_1 and E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

$$P(E_1 and E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = 12.5\%$$







الاحداث المترابطة ((نتيجة احدهما تؤثر في نتيجة الآخر))

اذا كان : E_1, E_2 حدثين مترابطين فأن احتمال وقوعهما معا هو حاصل ضرب احتمال الحدث الأول E_1 في ضرب (احتمال الحدث E_2 بعد حصول الحدث E_1) . أي أن :

$$P(E_1 and E_2) = P(E_1) \times P(E_2 after\ E_1)$$

مثال كيس يحتوي على 3 كرات حمر , 4 كرات خضر , 5 كرات زرق سحبت منه كرة عشوائيا ثم لم نعيد الكرة الحمراء الى الكيس . ما احتمال سحب كرة حمراء ثم كرة خضراء ؟

الحل : العدد الكلي للكرات $(5 + 4 + 3 = 12)$

سحب الكرة الحمرء

$$P(R) = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد الكلي للكرات}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

عدم اعادة الكرة الحمراء للكيس يعني أن عدد الكرات الحمر اصبح 2 كرة والعدد الكلي للكرات في هذه الحالة هو 11 كرة بدل 12

سحب الكرة الخضراء $P(G \text{ after } R) = \frac{\text{عدد الكرات الخضراء}}{\text{عدد الكلي الجديد للكرات}} = \frac{4}{11}$

الحدثان مترابطان $P(R \text{ and } G) = P(R) \times P(G \text{ after } R)$

$$P(R \text{ and } G) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{11} = \frac{1}{11}$$

مثال **صندوق فيه 5 كرات حمر , 3 زرق , 8 صفر سحبت كرة من الصندوق دون اعادتها ثم سحبت ثانية**
جد : P(صفراء ثم حمراء) .

الحل : العدد الكلي للكرات $(5 + 3 + 8 = 16)$

نفرض أن $P(Y)$ سحب كرات صفراء $\Leftarrow$ $P(Y) = \frac{\text{عدد الكرات الصفراء}}{\text{عدد الكلي للكرات}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

عدم اعادة الكرة الصفراء اصبح في الصندوق 5 كرات حمراء , 3 زرقاء , 7 صفراء أي مجموعهما 15 كرة .

سحب كرة حمراء من الصندوق $P(R \text{ after } Y) = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد الكلي الجديد للكرات}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

الحدثان مترابطان $P(Y \text{ and } R) = P(Y) \times P(R \text{ after } Y)$

$$P(Y \text{ and } R) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

تأكد من فهمك

1 **اطلق احمد مؤشر القرص المقابل مرتين , ما احتمال ان يأتي المؤشر عند العدد 3 في المرتين ؟**

1 2 3 4 5 6 7 8

الحل : العدد الكلي للأرقام $= 8$

احتمال ان يأتي المؤشر عند العدد 3 في الأولى $P(E_1) = \frac{\text{يأتي المؤشر عن العدد 3}}{\text{العدد الكلي للأرقام}} = \frac{1}{8}$

$$P(E_2) = \frac{\text{يأتي المؤشر عن العدد 3}}{\text{العدد الكلي للأرقام}} = \frac{1}{8}$$ احتمال ان يأتي المؤشر عند العدد 3 في الثانية

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$ الحدثان مستقلان

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64} = 0.015 = 1.5\%$$

---

2 صندوق فيه 3 كرات حمراء , 3 كرات خضر . ما احتمال سحب كرتين خضر من دون اعادة الكرة الأولى ؟

الحل : العدد الكلي للكرات $(3 + 3 = 6)$

$$P(G) = \frac{\text{عدد الكرات الخضراء}}{\text{عدد الكلي للكرات}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$ سحب الكرات الخضراء

عدم اعادة الكرة الخضراء اصبح عدد الكرات في الصندوق 3 حمراء , 2 خضراء أي مجموعهما 5

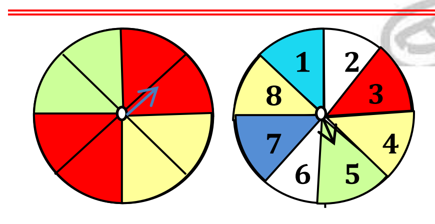
$$P(G \text{ after } G) = \frac{\text{عدد الكرات الخضراء المتبقية}}{\text{عدد الكلي الجديد للكرات}} = \frac{2}{5}$$

$$P(G \text{ and } G) = P(G) \times P(G \text{ after } G)$$ الحدثان مترابطان

$$P(G \text{ and } G) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

---

3 اطلق مؤشر في القرصين المقابلين مرة واحدة . ما احتمال ان يأتي مؤشر الأول على اللون الأحمر ومؤشر الثاني على العدد 5 .



الحل : عدد الكلي للأرقام $= 8$

$$P(E_1) = \frac{\text{احتمال ان يأتي المؤشر على اللون الأحمر}}{\text{عدد الكلي للأرقام}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$ القرص الأول

$$P(E_2) = \frac{\text{احتمال ان يأتي المؤشر على العدد 5}}{\text{عدد الكلي للأرقام}} = \frac{1}{8}$$ القرص الثاني

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$ الحدثان مستقلين

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16} = 0.063 = 6.3\%$$

4 رمي قطعتي نقود مرة واحدة . ما احتمال ظهور صورة على القطعة الأولى وكتابة على القطعة الثانية ؟

الحل : عدد الكلي لظهور الصورة = 2

احتمال ظهور صورة على القطعة الأولى

$$P(E_1) = \frac{\text{احتمال ظهور صورة على القطعة الأولى}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{1}{2}$$

احتمال ظهور كتابة على القطعة الثانية

$$P(E_2) = \frac{\text{احتمال ظهور كتابة على القطعة الثانية}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{1}{2}$$

الحدثان مستقلين

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

تدرب وحل التمرينات

5 صندوق فيه 5 بطاقات حمر , 4 بطاقات سود , 6 بطاقات خضر . سحبت بطاقة دون اعادتها للصندوق وسحبت بطاقة ثانية . ما احتمال ان تكون البطاقة الأولى حمراء والثانية سوداء ؟

الحل : العدد الكلي للبطاقات $(6 + 4 + 5 = 15)$

احتمال ان تكون البطاقة الأولى حمراء

$$P(R) = \frac{\text{عدد البطاقات الحمراء}}{\text{العدد الكلي للبطاقات}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

عدم اعادة البطاقة الحمراء الى الصندوق اصبح عدد البطاقات 4 حمراء , 4 سوداء , 6 خضراء أي مجموعهما 14

احتمال ان تكون البطاقة الثانية سوداء

$$P(B \text{ after } R) = \frac{\text{عدد البطاقات السوداء}}{\text{عدد الكلي الجديد للبطاقات}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

الحدثان مترابطان

$$P(B \text{ and } R) = P(R) \times P(B \text{ after } R)$$

$$P(B \text{ and } R) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{21}$$

6 رمي قطعتي نقود مرة واحدة . ما احتمال ظهور الرسم على القطعتين ؟

الحل : الاحتمالات الممكنة التي تظهر عند رمي قطعتي نقود مرة واحدة هي :

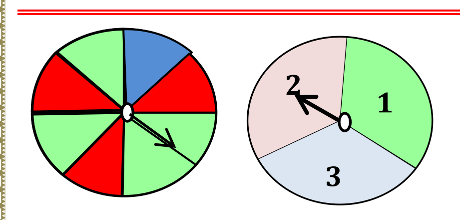
$\Omega = \{(H,H)M(H,T)M(T,H),(T,T)\}$

العدد الكلي $n = 4$, عدد احتمالات ظهور الرسم (الصورة) هو $\{(H,H)\}$ $m = 1$

$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4}$

---

7 اطلق مؤشر في القرصين المجاورين مرة واحدة . ما احتمال أن يأتي مؤشر الأول على اللون الأخضر ومؤشر الثاني على العدد 3 ؟



الحل : العدد الكلي للأرقام في مؤشر القرص الأول $= 8$

احتمال ان يأتي مؤشر الأول على اللون الأخضر

$P(E_1) = \frac{\text{احتمال ان يأتي مؤشر الأول على اللون الأخضر}}{\text{العدد الكلي للأرقام}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

العدد الكلي للأرقام في مؤشر القرص الثاني $= 3$

احتمال يأتي مؤشر الثاني على العدد 3

$P(E_2) = \frac{\text{احتمال ان يأتي مؤشر الثاني على العدد 3}}{\text{العدد الكلي للأرقام}} = \frac{1}{3}$

الحدثان مستقلين

$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$

$P(E_1 \text{ and } E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

---

8 رمي حجري النرد مرة واحدة . ما احتمال ظهور عدد يقبل القسمة على 3 على الحجر الأول وعدد يقبل القسمة على 5 في الحجر الثاني .

الحل : فضاء العينة للحجر الأول : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, n = 6$

الأعداد التي تقبل القسمة على 3 هي : $\{3,6\}, m = 2$

$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

فضاء العينة للحجر الثاني : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, n = 6$

الأعداد التي تقبل القسمة على 5 هي : $\{5\}, m = 1$

$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$$

الحدثان مستقلين

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

تدرب وحل مسائل حياتية

9 حلوى : تحتوي علبة على 10 قطع حلوى بطعم الفراولة , 15 قطعة بطعم الشكولاتة , 5 قطع بطعم الليمون . ما احتمال اختيار قطعتين عشوائيا الواحدة تلو الأخرى دون ارجاع على أن تكون الأولى بطعم الشكولاتة والثانية بطعم الليمون ؟

الحل : مجموع قطع الحلوى هي : $(10 + 15 + 5 = 30)$

نفرض احتمال اختيار القطعة الأولى بطعم الشكولاتة هي : $P(E_1)$

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد قطع الحلوى بطعم الشكولاتة}}{\text{مجموع قطع الحلوى}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

عدم ارجاع قطعة الشكولاتة , اصبحت العلبة تحتوي على 10 قطع حلوى بطعم الفراولة , 14 قطعة بطعم الشكولاتة , 5 قطع بطعم الليمون . أي مجموع القطع الجديد هو 29

نفرض احتمال اختيار القطعة الثانية بطعم الليمون هي : $P(E_2)$

$$P(E_2 \text{ after } E_1) = \frac{\text{عدد قطع الحلوى بطعم الليمون}}{\text{مجموع الجديد قطع الحلوى}} = \frac{5}{29}$$

الحدثان مترابطان

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2 \text{ after } E_1)$$

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{29} = \frac{5}{58}$$

اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

10 كتب : **اختارت سها كتابا من رف في غرفتها واعادته ثم اختارت كتابا اخر . ما احتمال أن يكون اختيار الكتاب من كتب الرياضيات ؟ علما أن الرف يحتوي على 5 كتب رياضيات , 2 كتاب لغة انكليزية , 3 كتب علوم .**

الحل : مجموع الكتب هي : $(5 + 2 + 3 = 10)$

احتمال اختيار كتاب الرياضيات الأول $P(E_1) = \frac{\text{عدد كتب الرياضيات}}{\text{مجموع الكتب}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

احتمال اختيار كتاب الرياضيات الثاني $P(E_2) = \frac{\text{عدد كتب الرياضيات}}{\text{مجموع الكتب}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

الحدثان مستقلين $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

فكر

11 اكتشف الخطأ : **يريد كل من جمانة واختها سالي تحديد احتمال اختيار كرة حمراء واخرى صفراء عشوائيا من كيس يحتوي 4 كرات حمراء , 5 كرات صفراء دون ارجاع الكرة بعد السحب .**

جمانة

$\mathbf{P}(\text{حمراء و صفراء}) = \mathbf{P}(\text{حمراء}) \times \mathbf{P}(\text{صفراء})$

$= \frac{4}{9} \times \frac{5}{9}$

سالي

$\mathbf{P}(\text{حمراء و صفراء}) = \mathbf{P}(\text{حمراء}) \times \mathbf{P}(\text{صفراء})$

$= \frac{4}{9} \times \frac{5}{8}$

ايهما كان حلها صحيحا ؟

الحل : العدد الكلي للكرات هو : $(4 + 5 = 9)$

احتمال اختيار كرة حمراء $P(E_1) = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد الكلي للكرات}} = \frac{4}{9}$

عدم اعادة الكرة الحمراء اصبح 3 كرات حمراء , 5 كرات صفراء . أي مجموع الجديد للكرات هو 8

احتمال اختيار كرة صفراء $P(E_2 \text{ after } E_1) = \frac{\text{عدد الكرات الصفراء}}{\text{مجموع الجديد للكرات}} = \frac{5}{8}$



اعداد الاستاذ رائد علي عبد الحسين 07703153998

$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2 \text{ after } E_1)$ الحدثان مترابطان

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{18}$$

اجابة سالي هي الصحيحة

12 **تحد : عند رمي حجر النرد وقطعة نقود . ما احتمال ظهور رقم اكبر من 2 واصغر من 6 على حجر النرد والكتابة على قطعة النقود ؟**

الحل : فضاء العينة لحجر النرد هي : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, n = 6$

احتمال ظهور رقم اكبر من 2 واصغر من 6 هو : $\{3,4,5\}, m = 3$

$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

فضاء العينة لقطعة النقود هي : $\Omega = \{H, T\}, n = 2$

احتمال ظهور الكتابة هو : $\{H\}, m = 1$

$$P(E_2) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$$

$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$ الحدثان مستقلين

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

13 **مسألة مفتوحة : 10 بطاقات بثلاثة اشكال مختلفة . اكتب مسألة تتعلق بسحب بطاقتين عشوائيا دون ارجاعهما على ان يكون الاحتمال $\frac{1}{15}$**

الجواب : صندوق فيه 5 بطاقات صفراء , 3 بطاقات خضراء , 2 بطاقة حمراء سحبت بطاقة دون اعادتها للصندوق وسحبت بطاقة ثانية . ما احتمال ان تكون البطاقة الأولى حمراء والثانية خضراء .

الحل : العدد الكلي للبطاقات : $(5 + 3 + 2 = 10)$

احتمال ان تكون البطاقة الأولى حمراء $P(R) = \frac{\text{عدد البطاقات الحمراء}}{\text{عدد الكلي للبطاقات}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

عدم اعادة البطاقة اصبح 5 صفراء , 3 خضراء , 1 حمراء . أي العدد الكلي الجديد للبطاقات 9

احتمال ان تكون البطاقة الثانية خضراء $P(G \text{ after } R) = \dfrac{\text{عدد البطاقات الخضراء}}{\text{العدد الكلي الجديد للبطاقات}} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

الحدثان مترابطان $P(R \text{ and } G) = P(R) \times P(G \text{ after } R)$

$$P(R\ and\ G) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

اكتب **مثالا على حدثين مستقلين ومثالا اخر على حدثين مترابطين .**

الجواب : مثال على حدثين مستقلين تمرين 12 أو اي مثال او تمرين اخر في الملزمة .

مثال على حدثين مترابطين . تمرين 9 أو اي مثال او تمرين اخر في الملزمة .

خطة حل مسألة (انشئ نموذجا)

مثال **حاول محمد ترتيب 5 قطع ملونة مربعة الشكل (أسود , أحمر , أزرق , أصفر , أخضر) بطرائق مختلفة . كم طريقة يمكن أن يرتبها بشرط أن أول مربع أسود اللون واخر مربع أصفر اللون ؟**

الحل : الأول : (أسود , أحمر , أخضر , أزرق , أصفر) . الثاني : (أسود , أحمر , أزرق , أخضر , أصفر)

الثالث : (أسود , أخضر , أزرق , أحمر , أصفر) . الرابع : (أسود , أخضر , أحمر , أزرق , أصفر)

الخامس : (أسود , أزرق , أخضر , أحمر , أصفر) .السادس : (أسود , أزرق , أحمر , أخضر , أصفر)

هنالك ستة طرائق لترتيبها

طريقة اخرى : يمكن ان نجد عدد طرائق باستعمال مضروب العدد !3

طريقة $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$



1 لديك الأرقام $1, 2, 3, 4$ كم عدد يمكن تكوينه من 4 ارقام شرط عدم تكرار الرقم في العدد والعدد اكبر من 4000 ؟

الحل : عدد طرق اختيار رقم الألوف $= 1$

عدد طرق اختيار رقم المئات 3

عدد طرق اختيار رقم العشرات $= 2$

عدد طرق اختيار رقم الآحاد $= 1$ $\Leftarrow$ $\therefore$ عدد الطرق $= 1 \times 2 \times 3 \times 1 = 6$ طريقة

---

2 في بستان فلاح 28 شتلة برتقال وتفاح , فاذا كان مقابل كل 4 شتلات برتقال و 3 شتلات تفاح . ما عدد شتلات البرتقال ؟

الحل :

شتلات في المربع الواحد $4 + 3 = 7$

مربعات في البستان $28 \div 7 = 4$

شتلة برتقال $4 \times 4 = 16$

شتلة تفاح $4 \times 3 = 12$

---

3 مزارع يسقي بستانه مرة في كل اسبوعين . كم مرة يسقي البستان في كل 6 أشهر .

الحل :

6 اشهر $= 6 \times 30 = 180$ يوم $\Leftarrow$ اسبوع $180 \div 7 \approx 26$ $\Leftarrow$ اسبوعان : 13

مرة $13 \times 1 = 13$

مراجعة الفصل

تصميم دراسة مسحية وتحليل نتائجها

مثال طلب من كل عاشر زائر من بين 3000 زائر لحديقة الزوراء في احد الايام ان يجيب على سؤال معين .

i) حدد العينة . ii) حدد المجتمع الذي اختير منه . iii) حدد ما اذا كانت العينة متحيزة أم لا .

الحل : i) العينة : الزوار الذين وجه لهم السؤال وعددهم 300 زائر .

ii) المجتمع : جميع زوار الحديقة وعددهم 3000 زائر .

iii) العينة غير متحيزة : لأنهم اختيروا عشوائيا .

تدريب 1 في سباق العدو التي تنظمها وزارة الشباب والرياضة حقق احد المتسابقين خلال عشر سنوات المراكز الآتية : 10 ,2 ,4 ,3 ,1 ,1 ,2 ,1 ,1 ,1 ,2 أي مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي , الوسيط , المنوال)) هو الأنسب لتمثيل هذه البيانات .

الحل : الوسط الحسابي : غير مناسب لتمثيل هذه البيانات لوجود قيمة كبيرة متطرفة هي : 10 تؤثر على الوسط الحسابي .

الوسيط : نرتب القيم تصاعديا : 1,1,1,1,1,2,2,2,3,4,10

الوسيط : 2 هو المقياس الأنسب لتمثيل هذه البيانات لدم وجود فجوة كبيرة في وسط البيانات .

المنوال : هو مقياس الأنسب لتمثيل هذه البيانات لوجود قيمة متكررة خمس مرات هي : 1

تدريب 2 اختار مدير مدرسة 20 طالبا لتمثيل المدرسة في مسابقة علمية .

i) حدد العينة . ii) حدد المجتمع الذي اختير منه . iii) حدد ما اذا كانت العينة متحيزة أم لا .

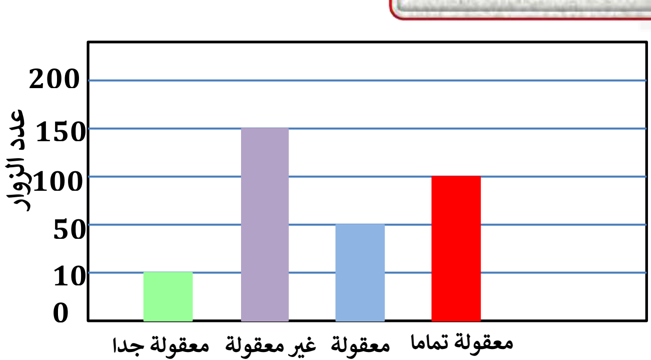
الحل : i) العينة : طلاب المدرسة وعددهم 20 طالب .

ii) جميع طلاب المدرسة .

iii) العينة غير متحيزة : لأن الطلاب اختيروا عشوائيا .

البيانات والاحصاءات المضللة

مثال سئل 200 زائر حول اسعار بطاقات الدخول للمسرح ومثلت الاجابات بالأعمدة . هل التمثيل يعطي الصورة الصحيحة للإجابات .



الحل : يبدو للوهلة الأولى أن معظم الزوار غير راضين عن اسعار البطاقات ومع ذلك فأن اطوال المدة الزمنية للتدريج غير ثابتة . فنجد أن 150 زائرا غير راضين عن الأسعار في حين أن عدد الراضين على الاسعار 160 زائرا وعليه فأن التمثيل يعد مضللا .

تدريب 1 يكون الرسم البياني مضللا اذا تحققت على الاقل احدى الحالات الآتية :

* عندما لا يبدأ الرسم البياني بالأعمدة من الصفر .
* عندما تكون اطوال الفترات غير متساوية .
* عدم الاشارة الى بعض الاعداد التي تم حصرها .

تدريب 2 كيف تميز بين الرسم البياني المضلل وغير المضلل ؟

الحل : الرسم البياني المضلل لا يبدأ من الصفر وكذلك تكون اطوال الفترات غير متساوية والاعمدة لا تتناسب مع القيم العددية المذكورة .

تدريب 3 لأي هدف تستعمل الاحصاءات المضللة ؟

الحل : تستعمل لإرضاء قناعة التاجر أو المستفيد أو صاحب العرض للبضاعة وتضليلا للمستهلك وايهامه بأن البضاعة رخيصة وتكلفتها قليلة ولكن الظاهر شيء والمخفي شيء آخر .

التباديل والتوافيق



تريد جمانة اختيار 3 اقداح من 5 اقداح تحتوي على عصير الفواكه : تفاح , ليمون , عنب , موز , اناناس . بكم طريقة يمكنها الاختيار ؟

الحل : ترتيب غير مهم يحل بالتوافيق

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad n = 5\,, r = 3$$

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} = 5 \times 2 = 10$$

مثال يراد تكوين عدد من اربع مراتب من مجموعة الارقام 1, 2, 3, 4, 5 دون تكرار الرقم في العدد؟

الحل : يحل بالتباديل

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad n = 5\,, r = 4$$

$$P_4^5 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 120$$

تدريب 1 تريد سالي ترتيب 4 كتب في خزانتها التي تحتوي على 8 رفوف شرط الا تضع اكثر من كتاب واحد على كل رف . كم خيارا لديها ؟

الحل : الترتيب غير مهم يحل بالتوافيق

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad n = 8\,, r = 4$$

$$C_4^8 = \frac{8!}{4!\,(8-4)!} = \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2 \times 7 \times 5 = 70$$ طريقة

تدريب 2 بكم طريقة يمكن تكوين لجنة من 4 طالبات من مجموع 8 طالبات ؟

الحل : الترتيب غير مهم يحل بالتوافيق

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad n = 8\,, r = 4$$

$$C_4^8 = \frac{8!}{4!\,(8-4)!} = \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2 \times 7 \times 5 = 70$$ طريقة

تدريب 3 اعلنت شركة عن 5 وظائف شاغرة فيها فتقدم للاعلان 10 اشخاص . بكم طريقة يمكن شغل الوظائف الخمس ؟

الحل : يحل بالتباديل

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad n = 10\,, r = 5$$

$$P_5^{10} = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$$

الاحتمال التجريبي والاحتمال النظري

مثال كيس يحتوي على 5 كرات زرق , 8 كرات خضر , 7 كرات صفر . جد :
i) ما نوع الاحتمال نظري أم تجريبي ؟ ii) جد احتمال سحب كرة زرقاء واحدة ؟

الحل : i) الاحتمال نظري .

ii) عدد الكلي للكرات $(5 + 8 + 7 = 20)$

$$P(E) = \frac{\text{عدد الكرات الزرقاء}}{\text{عدد الكلي للكرات}} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

تدريب 1 سحبت كرة بشكل عشوائي من صندوق ثم اعيدت اليه . يبين الجدول التالي بعد 50 سحبة .

النتيجة	أحمر	أزرق	أصفر	أبيض	أخضر
السحوبات	8	10	15	11	6

i) ما نوع الاحتمال , نظري أم تجريبي ؟ ii) جد احتمال سحب كرة صفراء ؟
iii) اكتب الاحتمال بصورة عدد عشري ونسبة مئوية .

الحل : i) الاحتمال تجريبي .

ii) عدد الكلي للسحوبات 50

$$P(E) = \frac{\text{عدد الكرات الصفراء}}{\text{عدد الكلي للسحوبات}} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$$

iii) $\frac{3}{10} = 0.3 = 30\%$

تدريب 2 في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة . i) ما نوع الاحتمال , نظري أم تجريبي ؟
ii) جد احتمال ظهور عدد زوجي . iii) جد نسبة الاحتمال بالصورة العشرية والنسبة المئوية .

الحل : i) الاحتمال نظري .

ii) فضاء العينة : $n = 6$, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

احتمال ظهور عدد زوجي : $m = 3$, $\{2,4,6\}$ $\Leftarrow$ $P(E) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

iii) $\frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

الأحداث المركبة

مثال صندوق فيه 4 كرات حمر , 9 كرات صفر , 3 كرات سود . سحبت كرتان عشوائيا الواحدة بعد الاخرى دون اعادة الكرة المسحوبة اولا .

i) ما نوع الحدثين ؟　ii) جد احتمال سحب كرة حمراء ثم كرة سوداء ؟

iii) اكتب نسبة الاحتمال بالصورة المئوية .

الحل : i) الحدثان مترابطان .

ii) العدد الكلي للكرات : $(4 + 9 + 3 = 16)$

احتمال سحب كرة حمراء　$P(R) = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد الكلي للكرات}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

عدم اعادة الكرة المسحوبة اصبح 3 كرات حمراء , 9 كرات صفر , 3 كرات سود أي العدد الكلي الجديد للكرات 15

احتمال سحب كرة سوداء　$P(B \text{ after } R) = \frac{\text{عدد الكرات السوداء}}{\text{عدد الكلي الجديد للكرات}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

الحدثان مترابطان　$P(R \text{ and } B) = P(R) \times P(B \text{ after } R)$

$P(R \text{ and } B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$

iii) $\frac{1}{20} = \frac{1 \times 5}{20 \times 5} = \frac{5}{100} = 5\%$

تدريب 1 أعد حل المثال المجاور شرط اعادة الكرة المسحوبة اولا .

الحل : i) الحدثان مستقلان .

ii) العدد الكلي للكرات : $(4 + 9 + 3 = 16)$

احتمال سحب كرة حمراء　$P(R) = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد الكلي للكرات}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

احتمال سحب كرة سوداء　$P(B\ ) = \frac{\text{عدد الكرات السوداء}}{\text{عدد الكلي الجديد للكرات}} = \frac{3}{16}$

$P(R \text{ and } B) = P(R) \times P(B)$ الحدثان مستقلان

$$P(R \text{ and } B) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{16} = \frac{3}{64}$$

iii) $\frac{3}{48} = 0.047 = 4.7\%$





اخترت احدى بطاقات الارقام وتدوير مؤشر القرص الدوار في الشكل ادناه . جد احتمال ان يكون الناتج على كل منها عدد زوجي .

الحل : العدد الكلي للبطاقات = 5 $\Leftarrow$ $n = 5$

احتمال البطاقات زوجية : $m = 2$, $\{2,4\}$

$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{2}{5}$ احتمال البطاقات الزوجية

احتمال وقوف المؤشر على الاعداد الزوجية $m = 4$, $\{2,4,6,8\}$ الارقام الكلية للمؤشر : $n = 8$

$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$ الحدثان مستقلين

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5} = \frac{1 \times 20}{5 \times 20} = \frac{20}{100} = 20\%$$

اختبار الفصل

1 وزع استبيان على 30 طالب من بين 100 طالب أجب عما يأتي :

i) حدد العينة والمجتمع الذي اختير منه . ii) صف اسلوب توزيع الاستبيان .

iii) حدد ما اذا كانت العينة متحيزة أم لا .

الحل : i) العينة : توزيع الاستبيان على 30 طالب من بين 100 طالب .

المجتمع : 100 طالب .

ii) اسلوب توزيع الاستبيان : هي دراسة مسحية اذ تؤخذ الاجابات من افراد العينة المختارة .

iii) العينة غير متحيزة : لأن هذه العينة تتكون من طلاب اختيروا عشوائيا .



2 كيف تميز بين الرسوم البيانية المضللة والرسوم البيانية غير المضللة ؟

الحل : 1) الرسم البياني الضلل لا يبدأ من الصفر بينما الرسم البياني غير المضلل يبدأ من الصفر .
2) عدم تساوي الفترات في الرسم البياني المضلل بينما تساوي الفترات في الرسم البياني غير المضلل .

---

3 جد ناتج ما يأتي :

i) $C_0^5 = 1$ ii) $P_0^5 = 1$ iii) $C_{10}^{10} = 1$

iv) $P_{10}^{10} = 10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$

v) $C_5^7 = \frac{7!}{5!\,(7-5)!} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5! \times 2 \times 1} = 7 \times 3 = 21$

vii) $P_5^7 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$

---

4 بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من 3 طلاب من بين 8 طلاب ؟

الحل : الترتيب غير مهم يحل بالتوافيق

$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ $n = 8\,, r = 3$

$C_3^8 = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3 \times 2 \times 1 \times 5!} = 8 \times 7 = 56$

---

5 رمي حجر النرد 25 مرة وكانت النتائج كما موضح في الجدول التالي :

النتيجة	1	2	3	4	5	6
عدد المرات	2	6	3	5	2	7

i) ما نوع الاحتمال ؟ ii) جد احتمال ظهور العدد 4 ؟

الحل : i) الاحتمال تجريبي .

ii) عدد المرات = 25

$P(E) = \frac{\text{عدد مرات ظهور العدد 4}}{\text{عدد المرات}} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$



6 **في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة جد :**
i) نوع الاحتمال نظري أم تجريبي . ii) احتمال الحصول على عدد يقبل القسمة على 4 .

الحل : i) الاحتمال نظري .

ii) فضاء العينة لرمي حجر النرد مرة واحدة : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $n = 6$

احتمال الحصول على عدد يقبل القسمة على 4 : $\{4\}$, $m = 1$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$$

---

7 **وقف مهند في احدى تقاطعات مدينة بغداد واحصى انواع السيارات عند التقاطع من بين 20 سيارة شاهدها احصى 10 سيارات صالون , 7 سيارات نقل صغيرة لنقل الركاب , 3 سيارات حمل . قدر احتمال ان تكون السيارة التالية التي تجتاز التقاطع سيارة صالون .**

الحل : عدد الكلي للسيارات : $10 + 7 + 3 = 20$

$$P(E) = \frac{\text{عدد سيارات الصالون}}{\text{عدد الكلي للسيارات}} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

الاختيار من متعدد

تصميم دراسة مسحية وتحليل نتائجها

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

1 **أي مقاييس النزعة المركزية (أن وجدت) ؟ هو الأنسب للبيانات التالية :**

8, 8, 12, 11, 15, 15, 16, 21, 23, 27, 31, 70

a) المدى b) المنوال c) الوسيط d) الوسط الحسابي

الحل : الوسط الحسابي : غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة كبيرة متطرفة هي 70 تؤثر على الوسط الحسابي
المنوال : غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود اكثر من منوال هما : 8,15
الوسيط : نرتب البيانات تصاعديا : 8,8,11,12,15,15,16,21,23,27,31,70

$$ME = \frac{15 + 16}{2} = \frac{31}{2} = 15.5$$

الوسيط : 15.5 هو المقياس الأنسب لتمثيل البيانات لعدم وجود فجوة تتوسط البيانات .

---

2 **أي مقاييس النزعة المركزية (أن وجدت) ؟ هو الأنسب للبيانات التالية : 2, 3, 4, 5, 6, 7**

a) المدى **b) المنوال** **c) الوسيط** **d) الوسط الحسابي**

الحل : الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$

$$\bar{x} = \frac{2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7}{6} = \frac{27}{6} = 4.5$$

الوسط الحسابي : 4.5 هو المقياس الأنسب لتمثيل البيانات لعدم وجود قيمة متطرفة .

المنوال : لا يوجد منوال لعدم وجود تكرار في البيانات .

الوسيط : نرتب البيانات تصاعديا : 2,3,4,5,6,7

$$ME = \frac{4 + 5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

الوسيط : 4.5 هو المقياس الأنسب لتمثيل البيانات لعدم وجود فجوة تتوسط البيانات .

---

3 **أي مقاييس النزعة المركزية (أن وجدت) ؟ هو الأنسب للبيانات التالية : 18, 1, 3, 16, 23, 3, 2**

a) المدى **b) المنوال** **c) الوسيط** **d) الوسط الحسابي**



الحل : الوسط الحسابي : غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة كبيرة متطرفة هي 23 تؤثر على الوسط الحسابي

المنوال : هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة متكررة هي : 3

الوسيط : نرتب البيانات تصاعديا : 1,2,3,3,16,18,23

الوسيط : 16 هو مقياس غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود فجوة كبيرة في وسط البيانات

---

4 **المدى للبيانات الأتية : 18, 22, 24, 32, 18, 24 هو :**

a) 18 **b) 32** **c) 14** **d) 50**

الحل : المدى = القيمة الكبيرة – القيمة الصغيرة

المدى $= 32 - 18 = 14$

اعداد الاستاذ رائد على عبد الحسين 07703153998

5 أي المقاييس ليس من مقاييس النزعة المركزة ؟

a) المدى b) المنوال c) الوسيط d) الوسط الحسابي

6 القيمة المتطرفة لهذه البيانات : 3 ,5 ,6 ,5 ,5 ,3 ,30 ,4

a) 3 b) 5 c) 5 d) 30

7 يكون الوسيط هو أنسب مقاييس النزعة المركزية للبيانات التي :

a) توجد قيم متطرفة توجد فجوات كبيرة وسطها . b) لا توجد قيم متطرفة لا توجد فجوات كبيرة وسطها .

c) توجد قيم متطرفة لا توجد فجوات كبيرة وسطها . d) لا توجد قيم متطرفة توجد فجوات كبيرة وسطها .

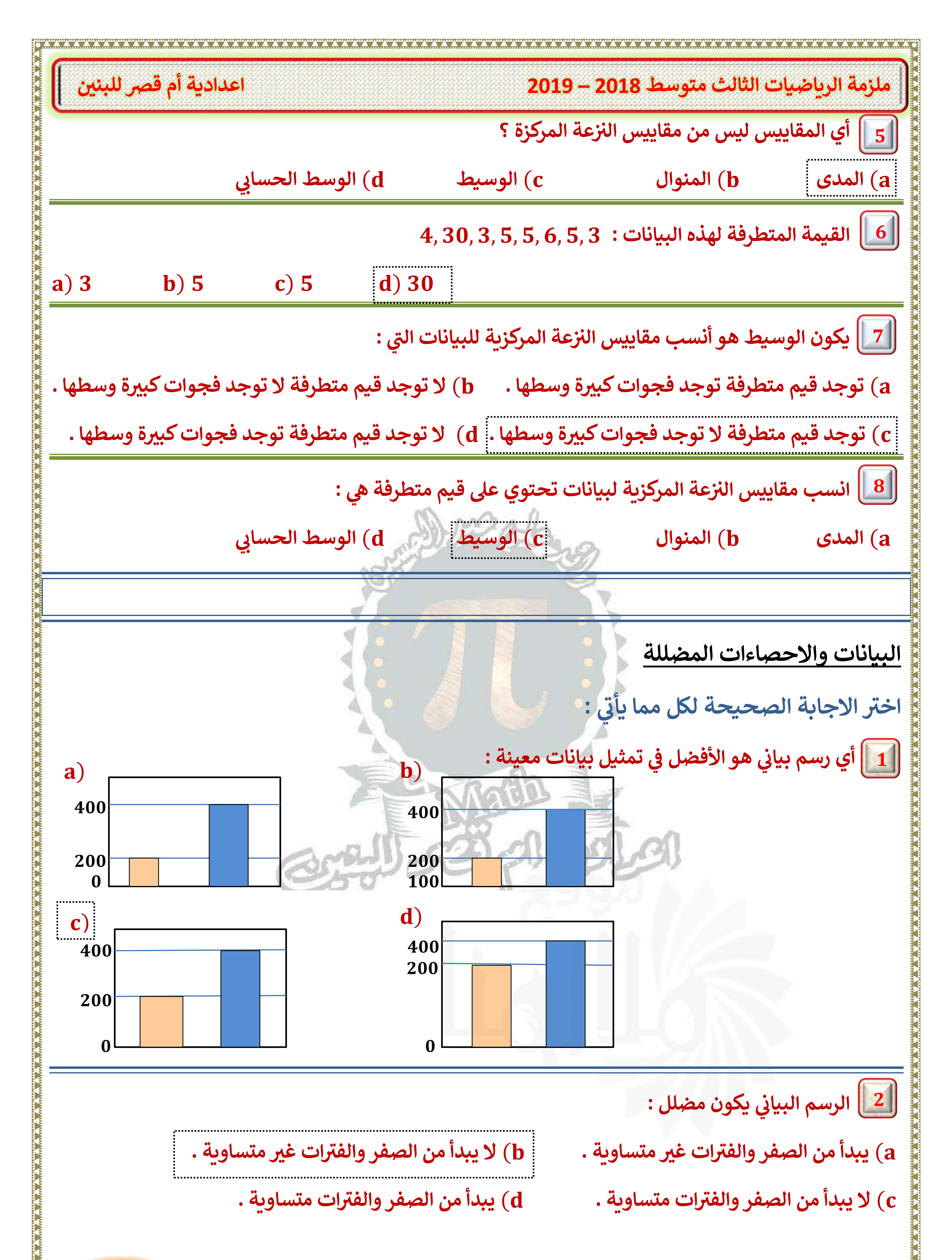
8 انسب مقاييس النزعة المركزية لبيانات تحتوي على قيم متطرفة هي :

a) المدى b) المنوال c) الوسيط d) الوسط الحسابي

البيانات والاحصاءات المضللة

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

1 أي رسم بياني هو الأفضل في تمثيل بيانات معينة :



2 الرسم البياني يكون مضلل :

a) يبدأ من الصفر والفترات غير متساوية . b) لا يبدأ من الصفر والفترات غير متساوية .

c) لا يبدأ من الصفر والفترات متساوية . d) يبدأ من الصفر والفترات متساوية .

3 في استطلاع شمل 6 مدرسين حول الدوام , افاد 4 منهم انهم يفضلون الدوام الصباحي . كتب المستطلع أن : (يفضل 2 مدرس من كل 3 مدرسين الدوام الصباحي) لماذا يعد هذا الاعلان مضللا ؟

a) العينة كبيرة جدا . b) يجب ان تشمل العينة عمال بناء .

c) العينة صغيرة جدا . d) يجب أت تكون الجملة (يفضل به مدرس من كل مدرسين) .

---

4 في محل تجاري عرض نوع من الاجبان على 9 شخص لتقويمه قبل عرضه ابدى 6 منهم اعجابهم بالمنتج بناء على ذلك صرح المنتج ((ان المنتج جيد لأن نسبة الذين فضلوه كانت 6 الى 3))

a) البيانات غير مضللة لأن نسبة 6 الى 3 نسبة كبيرة .
b) البيانات غير مضللة لأن نسبة الذين اعجبوا بالجبنة ضعف عدد الباقين .
c) البيانات مضللة رغم ان عدد الذين اعجبوا بالجبنة ضعف عدد الباقين .
d) البيانات مضللة لأن العينة التي اختيرت متوسطة الحجم .

التباديل والتوافيق

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

1 القيمة العددية للمقدار : $(5!-3!)(0!)$ تساوي :

a) 2 b) 0 c) 114 d) ليس أيا منها

الحل :

$(5!-3!)(0!) = (5\times 4\times 3\times 2\times 1-3\times 2\times 1)(1) = (120-6)(1) = 114$

---

2 قيمة : C_1^{51} تساوي :

a) 1 b) 51 c) 50 d) ليس أيا منها

---

3 قيمة : P_0^{100} تساوي :

a) 100 b) 100! c) 0 d) 1

---

4 عدد طرق تشكيل لجنة رباعية من 5 أشخاص لكل منهم وظيفة خاصة :

a) P_4^5 b) 5! c) 4! d) C_4^5



5 قيمة المقدار : $\frac{n!}{(n-2)!}$ تساوي :

a) $n!$ b) $(n-2)!$ c) $n(n-1)!$ d) $n(n-1)$

الحل :

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$$

---

6 عدد طرق اختيار 5 اسئلة من ورقة امتحان تحتوي على 7 اسئلة هو :

a) 7 b) 5 c) 2! d) 21

الحل : الترتيب غير مهم يحل بالتوافيق

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad n = 7\,, r = 5$$

$$C_5^7 = \frac{7!}{5!\,(7-5)!} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7\times6\times5!}{5!\times2\times1} = 7\times3 = 21$$

---

7 القيمة العددية للمقدار : $\frac{(8-3)!}{(3+2)!}$ هي :

a) 4! b) 3! c) 2! d) 1

الحل :

$$\frac{(8-3)!}{(3+2)!} = \frac{5!}{5!} = 1$$

---

8 قيمة المقدار : $C_0^n + P_0^n$ تساوي :

a) 1 b) 2 c) 0 d) 0

الحل :

$$C_0^n + P_0^n = 1 + 1 = 2$$

الاحتمال التجريبي والاحتمال النظري

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

1 اذا كان : E_1, E_2 حدثان متنافيان فأن : $P(E_1 \text{ or } E_2)$ تساوي :

a) $P(E_1) - P(E_2)$ b) $P(E_1) \times P(E_2)$ **c) $P(E_1) + P(E_2)$** d) $\frac{P(E_1)}{P(E_2)}$

---

2 سجل احمد 20 اصابة للهدف من 25 محاولة أي نسبة مئوية للاحتمال التجريبي ان يسجل احمد الهدف في المحاولة التالية :

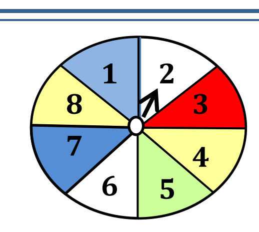
a) 50% b) 60% b) 70% **d) 80%**

الحل :

$$P(E) = \frac{20}{25} = \frac{20 \times 4}{25 \times 4} = \frac{80}{100} = 80\%$$

---

3 اطلقت تمارة مؤشر القرص المقابل مرة واحدة أي نسبة مئوية للاحتمال النظري ان يدل المؤشر على الرقم 2



a) 35% b) 30% **c) 12.5%** d) 20%

الحل : عدد الكلي لأرقام القرص = 8 $\Leftarrow$ $n = 8$

احتمال ان يدل المؤشر على الرقم 2 $\Leftarrow$ $m = 1$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{1}{8} = 0.125 = 12.5\%$$

---

4 عند رمي حجري النرد مرة واحدة احتمال الحصول على عددين مجموعهما 3 أو حاصل ضربهما 3 هو

a) $\frac{1}{3}$ **b) $\frac{1}{9}$** c) $\frac{2}{3}$ d) 1

الحل : فضاء العينة : $n = 36$

احتمال الحصول على عددين مجموعهما 3 هو : $m = 2$, $\{(1,2),(2,1)\}$

$$P(E_1)=\frac{m}{n}=\frac{2}{36}$$

احتمال الحصول على عددين حاصل ضربهما 3 هو : $m=2$, $\{(1,3),(3,1)\}$

$$P(E_2)=\frac{m}{n}=\frac{2}{36}$$

$$P(E_1 \text{ or } E_2)=P(E_1)+P(E_2)$$

$$P(E_1 \text{ or } E_2)=\frac{2}{36}+\frac{2}{36}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

---

5 E_1, E_2 حدثان متنافيان اذا كان : $P(E_1 \text{ or } E_2)=\frac{5}{6}$ وأن : $P(E_2)=\frac{2}{3}$ فأن $P(E_1)$ تساوي :

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{5}$

الحل :

$$P(E_1 \text{ or } E_2)=P(E_1)+P(E_2)$$

$$\frac{5}{6}=P(E_1)+\frac{2}{3} \quad\Rightarrow\quad P(E_1)=\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\frac{5-4}{6}=\frac{1}{6}$$



6 عند رمي حجري النرد احتمال حصول على عددين مجموعهما 13 هو :

a) 3   b) 2   c) 1   d) 0

الحل : فضاء العينة : $n=36$

احتمال الحصول على عددين مجموعهما 13 هو : $m=0$, $\{0\}$ ((لا يوجد))

$$P(E)=\frac{m}{n}=\frac{0}{36}=0$$

الاحداث المركبة

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي :


E_1, E_2 حدثان مستقلان حيث : $P(E_1) = 0.3$ وان $P(E_2) = 0.9$ فان احتمال حدوث E_1, E_2 معا :

a) 1.2 b) 0.6 c) 0.27 d) 0.3

الحل :

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2) = 0.3 \times 0.9 = 0.27$$

---

2 رمى مصطفى حجر النرد وقطعة نقود , احتمال ظهور رقم اكبر من 5 على حجر النرد والكتابة على قطعة النقود هو :

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{12}$ d) 3

الحل : فضاء العينة لحجر النرد : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $n = 6$

احتمال ظهور رقم اكبر من 5 هو : $\{6\}$, $m = 1$

$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$$

فضاء العينة لقطعة النقود هو : $\Omega = \{H , T\}$, $n = 2$

احتمال ظهور الكتابة على قطعة النقود هو : $\{H\}$, $m = 1$

$$P(E_2) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$$

الحدثان مستقلان

$$P(E_1 \text{and } E_2) = P(E_1) \times P(E_1)$$

$$P(E_1 \text{and } E_2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

---

3 صندوق فيه 5 كرات حمر , 4 كرات خضر . E_1 : سحب كرة حمراء E_2 : سحب كرة خضراء دون اعادة الحمراء . فأن احتمال حدوثهما معا هو :

a) $\frac{10}{9}$ b) $\frac{5}{18}$ c) $\frac{19}{18}$ d) $\frac{1}{18}$

الحل : العدد الكلي للكرات : $(5 + 4 = 9)$

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد كرات الحمراء}}{\text{عدد الكلي للكرات}} = \frac{5}{9}$$

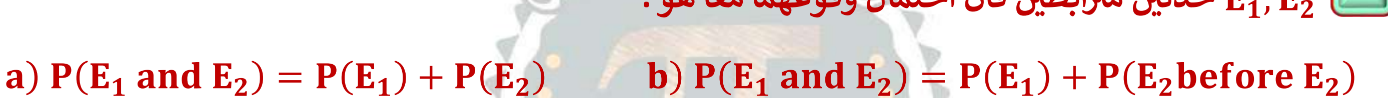
عدم اعادة الكرة الحمراء اصبحت : 4 كرات حمر , 4 كرات خضر . أي العدد الكلي الجديد للكرات 8

$$P(E_2 \text{after } E_2) = \frac{\text{عدد كرات الخضراء}}{\text{عدد الكلي الجديد للكرات}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$P(E_1 \text{and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2 \text{after } E_2)$ الحدثان مترابطان

$$P(E_1 \text{and } E_2) = \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$$

4 E_1, E_2 حدثين مترابطين فان احتمال وقوعهما معا هو :



a) $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ b) $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) + P(E_2 \text{before } E_2)$

c) $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2 \text{ after } E_1)$ d) $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_1 \text{ after } E_2)$



5 العلاقة : $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$ بين الحدثين : E_1, E_2 حيث هما :

a) لا توجد علاقة بينهما . b) مستقلان . c) مترابطان . d) غير ذلك .

6 E_1, E_2 حدثان متنافيان حيث : $P(E_1) = 0.15 , P(E_2) = 0.45$ فان احتمال حدوث E_1 أو E_2 هو :

a) 0.0675 b) 3 c) 0.6 d) 0.3

الحل :

$$P(E_1 \text{ or } E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

$$P(E_1 \text{ or } E_2) = 0.15 + 0.45 = 0.60 = 0.6$$